NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. CHABIRAND

Seconde solution de la question 406 (G. Salmon)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 230-232

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__230_1>

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 406 (G. SALMON)

(voir p. 224);

PAR M. G. CHABIRAND,
Élève de l'institution Jauffret.

Soient

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0$$

les équations rendues homogènes de trois cercles; l'équation du cercle qui coupe les premiers à angle droit est donnée par la relation

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dU_1}{dx} & \dfrac{dU_1}{dy} & \dfrac{dU_1}{dz} \\ \dfrac{dU_2}{dx} & \dfrac{dU_2}{dy} & \dfrac{dU_2}{dz} \\ \dfrac{dU_3}{dx} & \dfrac{dU_3}{dy} & \dfrac{dU_3}{dz} \end{vmatrix} = 0.$$

Je représente par $X = 0$ l'équation du cercle *cherché*; j'appelle $\frac{\xi}{\zeta}$, $\frac{\eta}{\zeta}$ les coordonnées de son centre; j'appelle de même $\frac{x_1}{z_1}$, $\frac{y_1}{z_1}$; $\frac{x_2}{z_2}$, $\frac{y_2}{z_2}$; $\frac{x_3}{z_3}$, $\frac{y_3}{z_3}$ les coordonnées des centres des trois cercles *donnés*.

On exprimera que les cercles $U_1 = 0$, $X = 0$ se coupent à angle droit, si l'on exprime que la polaire du centre de X par rapport à U_1 se confond avec la polaire du centre de U_1 par rapport à X.

Ces deux polaires ont pour équations

$$\xi \frac{dU_1}{dx} + \eta \frac{dU_1}{dy} + \zeta \frac{dU_1}{dz} = 0,$$

$$x_1 \frac{dX}{dx} + y_1 \frac{dX}{dy} + z_1 \frac{dX}{dz} = 0.$$

Développant chacune de ces équations et exprimant qu'elles représentent une même droite, on trouve

$$2\xi x_1 + 2\eta y_1 - \zeta(k_1 + \chi) = 0,$$

k_1 et χ désignant ici, pour abréger, les termes indépendants de $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{\xi}{\zeta}$, $\frac{\eta}{\zeta}$ dans les équations

$$U_1 = 0, \quad X = 0.$$

Les cercles U_1, U_3 donnent semblablement

$$2\xi x_2 + 2\eta y_2 - \zeta(k_2 + \chi) = 0,$$
$$2\xi x_3 + 2\eta y_3 - \zeta(k_3 + \chi) = 0.$$

Au moyen de l'équation

$$X = 0,$$

on peut éliminer χ successivement dans chacune de ces trois équations, et alors elles deviennent

$$\xi \frac{dU_1}{dx} + \eta \frac{dU_1}{dy} + \zeta \frac{dU_1}{dz} = 0,$$

$$\xi \frac{dU_2}{dx} + \eta \frac{dU_2}{dy} + \zeta \frac{dU_2}{dz} = 0,$$

$$\xi \frac{dU_3}{dx} + \eta \frac{dU_3}{dy} + \zeta \frac{dU_3}{dz} = 0.$$

Pour obtenir l'équation cherchée, il ne reste plus qu'à éliminer ξ, η, ζ entre ces trois équations. Pour cela il suffit d'égaler le déterminant à o. La proposition se trouve donc démontrée.

M. Joseph Bonnet, élève de l'institution Mayer, donne à peu près la même solution.