NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C. SOUILLART

Solution de la question 406

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 224-230

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__224_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 406

(voir t. XVI, p. 401),

PAR M. C. SOUILLART,
Ancien élève de l'École Normale.

Trouver l'équation du cercle qui coupe à angle droit trois cercles donnés.

1. Je cherche d'abord la relation qui doit exister entre les coefficients des équations de deux cercles pour que ces deux cercles se coupent à angle droit.

Soient

$$U = a(x^2 + y^2) + 2bxz + 2cyz + ez^2 = 0,$$
$$U_1 = a_1(x^2 + y^2) + 2b_1xz + 2c_1yz + e_1z^2 = 0$$

les équations de deux cercles rendus homogènes (en coordonnées rectangulaires).

Le centre du premier cercle a pour coordonnées $-\frac{b}{a}$, $-\frac{c}{a}$, et si l'on désigne par r son rayon, on a

$$\frac{e}{a} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 - r^2.$$

De même pour le deuxième cercle, les coordonnées du centre sont $-\frac{b_1}{a_1}$, $-\frac{c_1}{a_1}$, et si r_1 est son rayon, on a

$$\frac{e_1}{a_1} = \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{c_1}{a_1}\right)^2 - r_1^2.$$

J'exprime que la distance des centres est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit les rayons des deux cercles. Il vient

$$\left(\frac{b}{a} - \frac{b_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{c_1}{a_1}\right)^2 = r^2 + r_1^2,$$

ce qui donne, en éliminant les rayons,

$$\frac{e}{a} + \frac{e_1}{a_1} - 2\frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1} - 2\frac{c}{a}\frac{c_1}{a_1} = 0,$$

ou bien

$$ae_1 - 2bb_1 - 2cc_1 + ea_1 = 0:$$

c'est la relation cherchée.

2. Soient maintenant

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0$$

les équations des trois cercles, et soit

$$U = 0$$

l'équation inconnuė du cercle qui les coupe à angle droit. Je suppose que ces équations aient la forme indiquée plus haut, chaque coefficient faisant connaître par son indice le cercle auquel il se rapporte, et les coefficients sans indices appartenant au cercle inconnu. On aura, entre les coefficients a, b, c, e les trois équations

$$ae_1 - 2bb_1 - 2cc_1 + ea_1 = 0,$$

$$ae_2 - 2bb_2 - 2cc_2 + ea_2 = 0,$$

$$ae_3 - 2bb_3 - 2cc_3 + ea_3 = 0.$$

Entre ces trois équations et l'équation $U = 0$ où

$$a(x^2 + y^2) + 2bxz + 2cyz + ez^2 = 0,$$

il faut éliminer a, b, c, e. On sait que le résultat sera

$$\begin{vmatrix} e_1 & b_1 & c_1 & a_1 \\ e & b_2 & c_2 & a_2 \\ e_3 & b & c_3 & a_3 \\ x^2 + y^2 & -xz & -yz & z^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation cherchée. Si on la transforme, en multipliant par x, y ou z les éléments des diverses colonnes et ajoutant aux éléments d'une colonne les éléments d'une autre ou de deux autres, on obtient

$$\begin{vmatrix} e_1 z + b_1 x + c_1 y & b_1 z + a_1 x & c_1 z + a_1 y & a_1 \\ e_2 z + b_2 x + c_2 y & b_2 z + a_2 x & c_2 z + a_2 y & a_2 \\ e_3 z + b_3 x + c_3 y & b_3 z + a_3 x & c_3 z + a_3 y & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & z^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dz} & \frac{dU_1}{dx} & \frac{dU_1}{dy} & a_1 \\ \frac{dU_2}{dz} & \frac{dU_2}{dx} & \frac{dU_2}{dy} & a_2 \\ \frac{dU_3}{dz} & \frac{dU_3}{dz} & \frac{dU_3}{dz} & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & z^2 \end{vmatrix} = 0;$$

ou enfin

$$\begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dx} & \frac{dU_1}{dy} & \frac{dU_1}{dz} \\ \frac{dU_2}{dx} & \frac{dU_2}{dy} & \frac{dU_2}{dz} \\ \frac{dU_3}{dx} & \frac{dU_3}{dy} & \frac{dU}{dz} \end{vmatrix} = 0.$$

Remarque I. En transformant le déterminant, on a introduit le facteur z^3 à tous les termes de l'équation, puis supprimant le facteur z^2, il reste le facteur commun z.

Remarque II. Si l'on considère la tangente menée au point $\left(\frac{x_1}{z_1}, \frac{y_1}{z_1}\right)$ du premier cercle et les tangentes aux points $\left(\frac{x_2}{z_2}, \frac{y_2}{z_2}\right)$ et $\left(\frac{x_3}{z_3}, \frac{y_3}{z_3}\right)$ du deuxième et du troisième cercle, la condition pour que ces trois droites se coupent au même point est, comme on le voit aisément,

$$\begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dx_1} & \frac{dU_1}{dy_1} & \frac{dU_1}{dz_1} \\ \frac{dU_2}{dx_2} & \frac{dU_2}{dy_2} & \frac{dU_2}{dz_2} \\ \frac{dU_3}{dx_3} & \frac{dU_3}{dy_3} & \frac{dU_3}{dz_3} \end{vmatrix} = 0,$$

équation tout à fait analogue à celle qu'on doit trouver, et dont on pourrait peut-être tirer parti pour résoudre la question proposée.

La solution qui précède suppose que les axes des coordonnées soient rectangulaires : mais il a été démontré par M. G. Salmon (t. XVII, p. 95) que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dx} & \frac{dU_1}{dy} & \frac{dU_1}{dz} \\ \frac{dU_2}{dx} & \frac{dU_2}{dy} & \frac{dU_2}{dz} \\ \frac{dU_3}{dx} & \frac{dU_3}{dy} & \frac{dU_3}{dz} \end{vmatrix}$$

est un *covariant* des trois courbes U_1, U_2, U_3 : en l'égalant à zéro, on a donc toujours la même courbe, quels que soient les axes.

L'équation du cercle orthotomique à trois cercles donnés a été mise par M. Brioschi (t. XV, p. 463) sous une autre forme remarquable qu'on peut déduire de la précédente.

Soit

$$\lambda = 0$$

l'équation de la polaire de l'origine des coordonnées par rapport au cercle U; on a

$$\lambda = \frac{dU_1}{dz}.$$

Soit

$$l = 0$$

l'équation de la droite qui joint les centres des cercles U_2, U_3; les coordonnées de ces deux centres sont respectivement $-\frac{b_2}{a_2}$, $-\frac{c_2}{a_2}$ et $-\frac{b_3}{a_3}$, $-\frac{c_3}{a_3}$; donc la ligne des centres a pour équation

$$\begin{vmatrix} -\frac{b_2}{a_2} & -\frac{c_2}{a_2} & 1 \\ -\frac{b_3}{a_3} & -\frac{c_3}{a_3} & 1 \\ \frac{x}{z} & \frac{y}{z} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \\ -x & -y & z \end{vmatrix} = 0,$$

ou enfin

$$\begin{vmatrix} \frac{dU_2}{dx} & \frac{dU_2}{dy} \\ \frac{dU_3}{dx} & \frac{dU_3}{dy} \end{vmatrix} = 0;$$

donc

$$l = \begin{vmatrix} \frac{dU_2}{dx} & \frac{dU_2}{dy} \\ \frac{dU_3}{dx} & \frac{dU_3}{dy} \end{vmatrix}$$

par suite

$$l\lambda = \frac{dU_1}{dz} \begin{vmatrix} \frac{dU_2}{dx} & \frac{dU_2}{dy} \\ \frac{dU_3}{dx} & \frac{dU_3}{dy} \end{vmatrix}$$

Soient de même

$$\mu = 0, \quad \nu = 0$$

les équations des polaires de l'origine par rapport aux cercles U_2 et U_3, et

$$m = 0, \quad n = 0$$

les équations des droites qui joignent les centres des cercles U_3 et U_1, U_1 et U_2; on aura évidemment

$$l\lambda + m\mu + n\nu = \begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dx} & \frac{dU_1}{dy} & \frac{dU_1}{dz} \\ \frac{dU_2}{dx} & \frac{dU_2}{dy} & \frac{dU_2}{dz} \\ \frac{dU_3}{dx} & \frac{dU_3}{dy} & \frac{dU_3}{dz} \end{vmatrix}$$

l'équation du cercle orthotomique prend donc la forme

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$$

Note. MM. Richard Oxamendi, Cremona, professeur à Cremone, Ragonneau, capitaine d'artillerie, Joseph Martelli (de Milan) emploient à peu près les mêmes considérations jusqu'à la page 227.