Équations d'un cercle touchant des droites ; d'après M. Cayley

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 222-223

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__222_1>

ÉQUATIONS D'UN CERCLE TOUCHANT DES DROITES

D'après M. CAYLEY.

1°. Equations des trois droites

$$\begin{aligned} A\,x + B\,y + C &= 0, \\ A'x + B'y + C' &= 0, \\ A''x + B''y + C'' &= 0. \end{aligned}$$

Équation du cercle touchant ces trois droites

$$\begin{vmatrix} \sqrt{Ax+By+C}, & \sqrt{A'x+B'y+C'}, & \sqrt{A''x+B''y+C''} \\ \sqrt{A+Bi}, & \sqrt{A'x+B'i}, & \sqrt{A''x+B''i} \\ \sqrt{A-Bi}, & \sqrt{A'-B'i}, & \sqrt{A''-B''i} \end{vmatrix} = 0.$$

2°. Équations des trois droites

$$\left.\begin{aligned} x\cos\alpha + y\sin\alpha - p &= 0, \\ x\cos\beta + y\cos\beta - q &= 0, \\ x\cos\gamma + y\cos\gamma - r &= 0. \end{aligned}\right\}\ \text{axes rectang.}$$

Équation du cercle

$$\begin{aligned} &\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sqrt{x\cos\alpha + y\sin\alpha - p} \\ &+ \sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\sqrt{x\cos\beta + y\cos\beta - q} \\ &+ \sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sqrt{x\cos\gamma + y\sin\gamma - r} = 0. \end{aligned}$$

Posons

$$S = \sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha) + \sin(\alpha - \beta),$$

on obtient pour équation du cercle, sous forme rationnelle,

$$\begin{aligned}
&+[Sx + p(\sin\beta - \sin\gamma) + q(\sin\gamma - \sin\alpha) + r(\sin\alpha - \sin\beta)]^2 \\
&+[Sy + p(\cos\beta - \cos\gamma) + q(\cos\gamma - \cos\alpha) + r(\cos\alpha - \cos\beta)]^2 \\
&-[p\sin(\beta - \gamma) + q\sin(\gamma - \alpha) + r\sin(\alpha - \beta)]^2 = 0.
\end{aligned}$$

3°. Équations de quatre droites

$$\begin{aligned}
A\,x + B\,y + C &= 0, \\
A'x + B'y + C' &= 0, \\
A''x + B''y + C'' &= 0, \\
A'''x + B'''y + C''' &= 0.
\end{aligned}$$

Équation de condition pour qu'un cercle touche ces quatre droites :

$$\begin{vmatrix}
A, & B, & C, & \sqrt{A^2 + B^2} \\
A', & B', & C', & \sqrt{A'^2 + B'^2} \\
A'', & B'', & C'', & \sqrt{A''^2 + B''} \\
A''', & B''', & C''', & \sqrt{A'''^2 + B'''^2}
\end{vmatrix} = 0.$$