NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. DE JONQUIÈRES

Conique donnée par des points ou des tangentes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 215-217

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__215_1>

CONIQUE DONNÉE PAR DES POINTS OU DES TANGENTES;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

PROBLÈME. *Trouver quelle est l'*espèce *de la section conique qui est déterminée par cinq conditions données* (points ou droites).

I. Je supposerai que les cinq conditions sont cinq points ou cinq tangentes, car tous les autres cas se ramènent aisément à ces deux-là. Par exemple, si les données sont trois points et deux tangentes, on cherchera les points de contact des deux tangentes et la question sera réduite à celle où l'on donne cinq points. Mais comme on a alors quatre coniques distinctes qui satisfont aux conditions proposées, il faudra déterminer l'espèce de chacune de ces quatre coniques.

II. Si les données sont les cinq points a, b, c, d, e, on mènera par le point a trois droites ac', ad', ae' parallèles respectivement aux droites bc, bd, be. Si les *rayons doubles* des deux faisceaux homographiques (*) $a(c, d, e)$ et $a(c', d', e')$ sont réels et distincts, la conique est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à ces deux rayons. Dans ce cas, les rayons doubles peuvent être rectangulaires, et alors la conique est une hyperbole équilatère. Si ces rayons doubles sont coïncidents, la courbe a deux points confondus en un seul à l'infini; c'est donc une parabole. Enfin, s'ils sont imaginaires, la courbe est une ellipse. Dans ce dernier cas, les deux faisceaux peuvent être semblables (voir *Géom. sup.*, n° 145, p. 103), et la conique est un cercle.

Telle est, pour le cas des cinq points, la solution indiquée par M. Chasles dans sa *Géom. sup.*, n° 646, p. 458.

Celui où l'on donne cinq tangentes peut, ainsi qu'on va le voir, se résoudre avec la même facilité.

III. *On donne cinq tangentes de la conique dont on veut déterminer l'espèce.*

Soient Sc, Sc' deux des tangentes données; les trois autres marquent sur celles-ci deux divisions homographiques a, b, c et a', b', c'. Le point S étant considéré successivement comme appartenant à l'une et à l'autre de ces deux divisions, on cherchera ses homologues r et t; ce sont les points de contact des tangentes Sc, Sc' avec la courbe. On cherchera aussi les points I et J' qui correspondent, dans les deux divisions, respectivement, au point de l'autre qui est situé à l'infini. Si ces points sont eux-mêmes à l'infini, la courbe est une parabole. S'ils sont à distance finie, on achèvera le parallélogramme circonscrit SIS'J', dont le centre O est le centre même de la conique. Menant alors les droites Om et On parallèles respectivement à Sc et Sc', et joignant Or et Ot, on aura deux systèmes de diamètres conjugués, savoir Or, Om et

(*) Considérés comme homographiques. TM

Ot, On. Les rayons doubles de l'involution déterminée par les deux angles mOr, nOt sont les asymptotes de la conique (*Géom. sup.*, n° 689, p. 485). Donc cette courbe sera une hyperbole ou une ellipse, suivant que ces rayons sont réels ou imaginaires, c'est-à-dire suivant que les deux angles n'empiéteront pas ou bien empiéteront l'un sur l'autre. Si les deux angles sont droits, la conique est un cercle.

IV. *Autrement*. On ne déterminera que le point de contact r et le centre O. Puis on mènera, par les points a, b, c trois droites parallèles à rO, qui couperont Sc' en trois points α, β, γ. Les deux divisions de points a', b', c' et α, β, γ sont homographiques. On cherchera les points doubles de ces deux divisions. S'ils sont réels, c'est une preuve que la courbe a deux tangentes réelles parallèles au diamètre réel rO, et, par conséquent, c'est une ellipse. Mais si ces deux points sont imaginaires, ces tangentes sont imaginaires et la conique est une hyperbole.

Ainsi le problème est résolu.