BERTON

Arithmologie. Problème sur la puissance des nombres

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 209-213

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__209_0>

ARITHMOLOGIE.

Problème sur la puissance des nombres ;

PAR M. BERTON,
Employe au Ministère de la Marine.

Trouver, parmi les puissances parfaites des nombres entiers, celles qui ont pour racines la somme des chiffres nécessaire à leur expression dans un système de numération donné.

Désignons par N^m une quelconque des puissances cherchées, et par $(p+1)$ le nombre de chiffres nécessaires à son expression dans le système de numération dont la base est B; nous aurons les deux équations

$$(1) \qquad N^m = aB^p + bB^{p-1} + \ldots + gB + h,$$

$$(2) \qquad N = a + b + \ldots + g + h.$$

Mais chacun des chiffres $a, b, \ldots, g, h$ étant au plus égal à $(B-1)$, nous pourrons poser

$$(3) \qquad N \leqq (B-1)(p+1).$$

Substituant dans l'équation (1), il viendra

$$(B-1)^m (p+1)^m \geqq aB^p + bB^{p-1} + \ldots + gB + h,$$

et, à fortiori,

$$B^m (p+1)^m > B^p,$$

d'où

$$(p+1)^m > B^{p-m}.$$

Appliquant les logarithmes en prenant B pour base du système, on obtient

$$(4) \qquad \log(p+1) > \frac{p-m}{m},$$

inégalité qui donne la limite supérieure du nombre de chiffres des puissances cherchées. Ce nombre p, une fois connu, devra être substitué dans l'équation (3), pour que l'on puisse déduire de cette relation la limite des racines qui doivent satisfaire à la condition énoncée. Si donc on désigne par N' cette dernière limite, il suffira, pour résoudre le problème, d'élever successivement à la puissance donnée les nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots,\ N',$$

et de voir si, parmi les expressions de ces puissances, il y en a dont la somme des chiffres est égale à la racine qui leur correspond.

Dans le cas particulier de telle puissance ou de telle base données, on pourra abréger le nombre de ces essais en observant que si l'on retranche membre à membre les équations (1) et (2), la différence $N(N^{m-1}-1)$ devra être divisible par $(B-1)$.

Pour faire une première application, soient

$$B = 10 \quad \text{et} \quad m = 2.$$

La formule (4) donne

$$\log(p+1) > \frac{p-2}{2},$$

d'où

$$p < 4.$$

Donc, s'il existe, dans le système décimal, des carrés dont la racine carrée est égale à la somme des chiffres de leur expression, ces carrés ne peuvent être composés au plus que de quatre chiffres, et 36 est la limite des racines carrées dont il s'agit, car l'équation (3) devient dans les conditions de la question

$$N \leqq 9(3+1) = 36.$$

Mais si l'on retranche membre à membre les équations (1) et (2), on remarquera dans l'hypothèse que le produit $N(N-1)$ sera nécessairement divisible par 9, que par suite les racines carrées des nombres cherchés, ou ces racines diminuées d'une unité, devront être divisibles par 9, et qu'en définitive les seuls nombres qu'il y ait lieu d'élever au carré sont

$$1,\ 9,\ 10,\ 18,\ 19,\ 27,\ 28,\ 36.$$

Or ces nombres ont respectivement pour carrés

$$1,\ 81,\ 100,\ 324,\ 361,\ 729,\ 784,\ 1296,$$

et la somme des chiffres de ces carrés dans l'ordre donné est

$$1,\ 9,\ 1,\ 9,\ 10,\ 18,\ 19,\ 18.$$

Il n'y a donc, parmi tous les carrés exprimés dans le système décimal (en outre de l'unité) que le nombre 81 dont la somme des chiffres considérés comme représentant des unités simples soit égale à sa racine carrée.

Note. On peut généraliser ce résultat en disant que, dans un système de numération à base quelconque, la somme des chiffres du carré de la base diminuée de l'unité est toujours égale à la racine carrée de ce carré.

En effet, on a

$$(B-1)^2 = B(B-2)+1,$$

nombre dont la somme des chiffres est égale à

$$(B-2)+1=(B-1).$$

Soit, pour seconde application,

$$m=3 \quad \text{avec} \quad B=10.$$

L'équation (4) donne

$$\log(p+1) > \left(\frac{p-3}{3}\right),$$

d'où

$$p<6.$$

Donc s'il existe dans le système décimal des cubes dont la racine cubique est égale à la somme des chiffres de leur expression, ces cubes ne peuvent être composés, au plus, que de six chiffres, et 54 est la limite des racines cubiques dont il s'agit; car l'équation (3) devient, dans les conditions de la question,

$$N < 9(5+1) = 54.$$

Mais si l'on retranche membre à membre les équations (1) et (2), on remarquera dans l'hypothèse que le produit

$$N(N-1)(N+1)$$

et conséquemment l'un des trois facteurs N, (N — 1), (N + 1) devra être divisible par 9; que par suite les racines cubiques des nombres cherchés ou ces racines diminuées ou augmentées de l'unité devront être divisibles par 9, et qu'en définitive les seuls nombres qu'il y ait lieu d'élever au cube sont :

1,	8,	9,	10,	17,	18,	19,
	26,	27,	28,	35,	36,	37,
	44,	45,	46,	53,	54.	

Or le tableau suivant présente les cubes de ces nombres dans l'ordre donné, et, en dessous de chacun d'eux, entre parenthèses, la somme de leurs chiffres :

1	512	729	1000	4913	5832	6859
	(8)	(18)	(1)	(17)	(18)	(28)
	17576	19683	21952	42875	46656	50653
	(26)	(27)	(19)	(26)	(27)	(19)
	85184	91125	97336	148877	157464	
	(26)	(18)	(28)	(35)	(27)	

d'où l'on voit que, parmi tous les cubes exprimés dans le système décimal (en outre de l'unité), il n'y en a que cinq dont la somme des chiffres soit égale à leur racine cubique.

Ces cubes et leurs racines sont

Cubes..........	512	4913	5832	17576	19683
Racines cubiques..	8	17	18	26	27