NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CATALAN

Note sur les séries divergentes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 195-198

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__195_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

NOTE SUR LES SÉRIES DIVERGENTES;

PAR M. E. CATALAN.

I. En rédigeant, l'année dernière, un *Traité élémentaire des séries,* je remarquai cette proposition très-simple, qui infirme la plupart des théories imprimées et enseignées :

La somme d'un nombre indéfiniment grand (*) *de*

(**) *Indéfiniment grand* signifie ici : *qui croît indéfiniment.*

termes consécutifs peut avoir pour limite zéro, sans que la série soit convergente.

Pour vérifier ce théorème, il suffit de considérer la série *divergente*

$$\frac{1}{2\,l2}+\frac{1}{3\,l3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\,l\,(n+1)}+\ldots,$$

et de prendre la somme des n termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$. On obtient ainsi

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{(n+2)\,l\,(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)\,l(2n+1)}.$$

Tous les termes du second membre sont moindres que $\frac{1}{n\,ln}$; donc

$$S_{2n}-S_n<\frac{1}{ln},$$

et, conséquemment,

$$\lim\,(S_{2n}-S_n)=0.$$

II. Si, dans une série divergente, la somme d'un nombre indéfiniment grand de termes a quelquefois pour limite zéro, *cette somme peut,* à plus forte raison, *tendre vers une limite finie,* s'il existe, entre le nombre n de ces termes et le rang a du premier d'entre eux, une relation convenablement choisie. Par exemple,

$$\text{(1)}\qquad \lim\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=l2.$$

Cette formule (1) est devenue la *question* 458. Généralement, les solutions m'ont paru, ou inexactes, ou trop compliquées : j'espère que la démonstration suivante sera jugée simple et rigoureuse :

III. Théorème (évident au moyen d'une figure). *Soit* f(x) *une fonction positive et indéfiniment décroissante, du moins à partir de* x = a − 1; *soit* F(x) *la fonction primitive de* f(x). *On a*

$$(2)\quad \begin{cases} f(a)+f(a+1)+f(a+2)+\ldots+f(a+n-1) \\ > F(a+n)-F(a), \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} f(a)+f(a+1)+\ldots+f(a+n-1) \\ < F(a+n)-F(a)-f(a+n)+f(a). \end{cases}$$

IV. Corollaire. *Si le nombre entier* n *est une fonction donnée du nombre entier* a, *qui devienne infinie en même temps que* a, *et si la différence* F(a + n) − F(a) *tend vers une limite* λ *lorsque* a *croît indéfiniment,*

$$\lim[f(a)+f(a+1)+\ldots+f(a+n-1)]=\lambda.$$

V. Applications. 1°. Soient

$$f(a)=\frac{1}{a},\quad n=(p-1)a+q,$$

p et q étant deux nombres entiers donnés. On aura

$$F(a)=la+C,$$

$$F(a+n)-F(a)=l\left(p+\frac{q}{a}\right),\quad \lambda=lp;$$

donc,

$$(4)\quad \lim\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\ldots+\frac{1}{pa+q-1}\right]=lp.$$

En particulier,

$$(1)\quad \lim\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\ldots+\frac{1}{2a-1}\right]=l2.$$

2°. Soient

$$f(a)=\frac{1}{a\,la};\quad n=a^2;$$

d'où

$$F(a) = l\,la + C,$$

$$F(a+n) - F(a) = l\,\frac{l(a+a^2)}{la} = l\,\frac{la^2 + l\left(1+\frac{1}{a}\right)}{la};$$

puis $\lambda = l2$ et

$$\lim\left[\begin{array}{l}\frac{1}{a\,la} + \frac{1}{(a+1)\,l(a+1)} + \ldots \\ + \frac{1}{(a^2+a-1)\,l(a^2+a-1)}\end{array}\right] = l2.$$

3°. Soient, enfin,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad a = b^2, \quad n = 2b+1,$$

b étant un nombre entier.

Ces hypothèses donnent

$$F(x) = 2\sqrt{x} + C, \quad F(a+n) - F(a) = 2;$$

donc

$$\lim\left[\frac{1}{\sqrt{b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{b^2+2b}}\right] = 2.$$

VI. *Remarque.* A cause des inégalités (2), (3), on a

$$\frac{1}{\sqrt{b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{b^2+2b}} > 2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{b^2+2b}} < 2 + \frac{1}{b(b+1)};$$

ce qui est assez curieux.