

## Série de Tchebichef

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 18 (1859), p. 193-195

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1859\\_1\\_18\\_\\_193\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__193_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

### SÉRIE DE TCHEBICHEF.

*Bul. de l'Acad. de S.-Petersbourg*, t. XVII, n° 17, p. 29. Octobre 1858.

Soit

$$u = f(x),$$

fonctions affectées d'erreurs quelconques; M. Tchebichef trouve le développement par la méthode des *moindres carrés* (\*).

---

(\*) C'est la véritable méthode d'interpolation; elle tient compte des erreurs possibles dans les mesures. TM.

Faisons successivement

$$u_1 = f(h), \quad u_2 = f(2h), \dots, \quad u_n = f(nh),$$

ces valeurs étant affectées d'erreurs égales.

$u$  se développe suivant les dénominateurs de la fraction continue résultant du développement de l'expression

$$\frac{1}{x-h} + \frac{1}{x-2h} + \dots + \frac{1}{x-nh}.$$

Ces dénominateurs s'expriment à un facteur constant près, et en prenant  $\Delta x = h$  par

$$\Delta^l(x-h)(x-2h)\dots(x-lh)(x-nh-2h)\dots(x-nh-lh),$$

on a cette série

$$\begin{aligned}
u = & \frac{1}{n} \sum u_i + \frac{3 \sum i(n-i) \Delta u_i}{1^2 \cdot n \cdot (n^2 - 1^2) h^2} \Delta(x-h)(x-nh-h) \\
& + 5 \frac{\sum i(i+1)(n-i)(n-i-1) \Delta^2 u_i}{1^2 \cdot 2^2 \cdot n \cdot (n^2 - 1^2)(n^2 - 2^2) h^4} \\
& \quad \Delta^2(x-h)(x-2h)(x-nh-h)(x-nh-2h) \\
& + 7 \frac{\sum i(i+1)(i+2)(n-i)(n-i-1)(n-i-2) \Delta^3 u_i}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot n \cdot (n^2 - 1^2)(n^2 - 2^2)(n^2 - 3^2) h^6} \\
& \quad \Delta^3(x-h)(x-2h)(x-3h)(x-nh-h)(x-nh+2h)(x-nh-3h) \\
& + \dots
\end{aligned}$$

Les signes  $\Sigma$  s'étendent de  $i = 1$  à  $i = n$ .

Désignant les fonctions

$$\Delta(x-h)(x-nh-h), \quad \Delta^2(x-h), \dots, \quad \Delta^3$$

par  $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3$ , etc., on a

$$\begin{aligned}
\Delta^l = & (2l-1)h(2x-nh-h)\Delta^{l-1} \\
& - (l-1)^2[n^2 - (l-1)^2]h^2\Delta^{l-2};
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\Delta^1 = h(2x - nh - h),$$

$$\Delta^2 = 3h^2(2x - nh - h)^2 - (n^2 - 1)h^4,$$

$$\Delta^3 = 15h^3(2x - nh - h)^3 - 3(3n^2 - 7)h^5(2x - nh - h)$$

$$\Delta^4 = 105h^4(2x - nh - h)^4 - 30(3n^2 - 13)h^6(2x - nh - h)^2 \\ + 9(n^2 - 1)(n^2 - 9)h^8,$$

$$\Delta^5 = 945h^5(2x - nh - h)^5 - 1050(n^2 - 7)h^7(2x - nh - h)^3 \\ + 15(15n^4 - 230n^2 + 407)h^9(2x - nh - h).$$

Le développement en fraction continue de l'expression

$$\frac{1}{x+h} + \frac{1}{x-2h} + \frac{1}{x-3h} + \dots + \frac{1}{x+nh}$$

devient

$$\frac{2n}{2x - n - h - \frac{1^2(n^2 - 1^2)h^2}{3(2x - nh - h) - \frac{2^2(n^2 - 2^2)h^2}{5(2x - nh - h) - \frac{3^2(n^2 - 3^2)h^2}{7(2x - nh - h)}}}}$$