NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Sur une surface engendrée par des normales

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 192-193

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__192_0>

SUR UNE SURFACE ENGENDRÉE PAR DES NORMALES.

1. Soit

$$f = Py + Qx = 0$$

l'équation rendue homogène d'une surface; P et Q sont des fonctions entières de x, y, z, u, et les axes sont rectangulaires.

L'axe des z est sur la surface; car faisant

$$x = y = 0,$$

z reste indéterminé.

Soient x_1, y_1, z_1, u_1 les coordonnées d'un point de la surface, on aura

$$f_1 = P_1 y_1 + Q_1 x_1 = 0;$$

les indices indiquent des valeurs particulières.

L'équation du plan qui touche la surface au point désigné est

$$z\frac{df_1}{dz_1} + y\frac{df_1}{dy_1} + x\frac{df_1}{dx_1} + u\frac{df_1}{du_1} = 0.$$

Si le point de contact est sur l'axe des z, alors

$$x_1 = y_1 = 0,$$

et l'on a

$$\frac{df_1}{dz_1} = 0, \quad \frac{df_1}{dy_1} = P_1, \quad \frac{df_1}{dx_1} = Q_1, \quad \frac{df_1}{du_1} = 0.$$

Ainsi l'équation du plan tangent devient

$$P_1 y + Q_1 x = 0,$$

P_1 et Q_1 sont des fonctions de z_1 et u_1.

Les équations de la normale à la surface au même point $x_1 = y_1 = 0$ sont, les axes étant rectangulaires,

$$z = 0, \quad P_1 y - Q_1 x = 0.$$

Donc l'équation de la surface formée par toutes les normales à la surface partant de tous les points de z est

$$P_1 y - Q_1 x = 0.$$

Toutes ces normales sont parallèles au plan xy; c'est donc un conoïde de degré $r + 1$, si r désigne la plus haute puissance de z dans P_1 et Q_1.

Si z ne monte qu'au premier degré dans P_1 et Q_1, le conoïde devient un paraboloïde hyperbolique. Ce théorème a été démontré par M. Chasles lorsque la surface donnée est réglée et de second degré (*Correspondance mathématique de Quételet*, p. 97, § 75, 1839).

Un paraboloïde hyperbolique donne un second paraboloïde hyperbolique, ce second produit un troisième rencontrant rectangulairement le second et est tangent au premier; de sorte que ce troisième reproduit le second et ainsi de suite.