BERTON

Le produit de quatre nombres entiers en progression arithmétique ne saurait être le bicarré d'un nombre rationnel

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 191

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__191_0>

Le produit de quatre nombres entiers en progression arithmétique ne saurait être le bicarré d'un nombre rationnel ;

Par M. BERTON,
Employé au Ministère de la Marine.

Soient a, $a+h$, $a+2h$, $a+3h$ les quatre nombres proposés et P leur produit, on a

$$a(a+3h)=a^2+3ah,$$

$$(a+h)(a+2h)=a^2+3ah+2h^2,$$

d'où

$$P=(a^2+3ah+h^2)^2-h^4,$$

et faisant $P=p^4$,

$$p^4+h^4=(a^2+3ah+h^2)^2.$$

Mais, d'après un théorème connu (t. V, p. 71), la somme de deux bicarrés ne saurait être égale à un carré; donc l'équation ci-dessus est impossible dans les conditions de la question : ainsi P ne saurait être égal à un bicarré.

Remarque. Si avec quatre nombres entiers en progression arithmétique on forme un quadrilatère inscriptible, la surface de ce quadrilatère ne saurait être exprimée par le carré d'un nombre rationnel.

En effet, la surface d'un tel quadrilatère a pour expression la racine carrée du produit de quatre facteurs entiers qui se trouvent en progression arithmétique.

Note du Rédacteur. Voir Chasles, *Aperçu historique : Géométrie des Indiens*, p. 417.