# Limites de la série harmonique (solution des questions 452 et 453) ; d'après M. Schlömilch

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 18 (1859), p. 172-174

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__172_1>

## LIMITES DE LA SÉRIE HARMONIQUE
### (Solution des questions 452 et 453);
### D'APRÈS M. SCHLÖMILCH.

1. *Lemme.*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n > n\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}.$$

2. $$\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \ldots + \frac{n+1}{n} > n(n+1)^{\frac{1}{n}} \text{ (lemme)},$$

$$\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \ldots + \frac{n}{n} = n,$$

(*) Vient de publier dix-sept *Lessons* sur l'*algèbre supérieure moderne*, préliminaires d'un ouvrage sur les *High surfaces*, faisant suite aux *High curves*; clarté extrême, profondeur et élévation. Nous en parlerons souvent.

d'où par soustraction

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > n\left[(1+n)^{\frac{1}{n}} - 1\right].$$

3.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{n}{n+1} > n\,(n+1)^{-\frac{1}{n}},$$

$$\frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4} + \ldots + \frac{n+1}{n+1} = n,$$

par soustraction

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1} < n\left[1 - (n+1)\right]^{-\frac{1}{n}},$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < n\left[1 - (n+1)^{-\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right];$$

c'est la solution de la question 452 (t. XVII, p. 434).

Posons

$$e^{n\delta} = n+1, \quad n\delta = l.n+1, \quad n = \frac{l.(n+1)}{\delta},$$

ainsi

$$S_n > \frac{l.n+1}{\delta}(e^{\delta} - 1).$$

$$S_n < \frac{n}{n+1} + \frac{l n + 1}{\delta}(1 - e^{-\delta}).$$

Or

$$1 < \frac{e^{\delta} - 1}{\delta},$$

$$1 > \frac{1 - e^{-\delta}}{\delta};$$

donc

$$S_n > l\,(n+1),$$
$$S_n < 1 + l\,(n+1);$$

c'est la solution de la question 453.

Le rapport arithmétique des deux limites est constant; le rapport géométrique approche de l'unité avec $n$ croissant : donc la différence entre $S_n$ et ses limites diminue de plus en plus.

M. Schlömilch fait observer que les limites logarithmiques peuvent s'obtenir par la considération des séries $l(1+x)$ et $\log(1-x)$; c'est ce qu'a fait l'élève Michaux (p. 68).

Le procédé de M. Schlömilch s'applique à la série

$$\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha+2}+\ldots+\frac{1}{\alpha+n}.$$