Transformation des modules dans les congruences du premier degré, caractères de divisibilité des nombres ; d'après Bouniakowsky

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 168-170

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__168_0>

TRANSFORMATION DES MODULES DANS LES CONGRUENCES DU PREMIER DEGRÉ,

Caractères de divisibilité des nombres;

D'APRÈS BOUNIAKOWSKY.

1. $N - r \doteq p$, p est un nombre quelconque; cela veut dire que $N - r$ est divisible par p, et p est dit *module;* il s'agit de trouver r.

Soit

$$\begin{aligned}
N &= (p+n)q_1 + r_1, && \text{ou} \quad r_1 < p+n,\\
nq_1 &= (p+n)q_2 + r_2, && n \text{ nombre entier arbitraire},\\
nq_2 &= (p+n)q_3 + n_3, &&\\
&\dots\dots\dots\dots &&\\
nq_{m-1} &= (p+n)q_m + r_m, && \text{ou} \quad nq_m < p+n,
\end{aligned}$$

ainsi

$$(1) \left\{ \begin{aligned} N &= (q_1+q_2+q_3+\ldots+q_m)p + r_1+r_2+r_3+\ldots+nq_m \\ &= (q_1+q_2+q_3+\ldots+q_m)p + N'. \end{aligned} \right.$$

Si N' est inférieur à p, on a

$$N' = r.$$

Si N' surpasse $p+n$, on le divise par p et on a le reste cherché r; si p' surpasse encore $p+n$, on agit comme ci-dessus sur N, on parvient à

$$N'' = r'_1 + r'_2 + r'_3 + \ldots + nq'_m,$$

ou

$$N' = p + N'', \quad \text{et} \quad N'' < N';$$

et continuant de même on parvient à $N^{(\mu)}$ moindre que $p+n$.

2. Dans notre système de numération, on choisit n de manière que $p+n$ soit une puissance de 10 ; ce qui donne les restes à vue.

1°. *Exemple.* $p=9$; faisant $n=1$, $p+n=10$, on tombe sur la règle connue ; car les r sont les chiffres de N.

2°. $N=3678912$, $p=989$, prenons $n=11$, de sorte que $p+n=10^3$, alors

$$\begin{array}{ll}
\begin{array}{r}
3678=q_1; \\
3678 \\
\hline
40{,}458 \\
40 \\
\hline
440
\end{array}
&
\begin{array}{r}
r_1=912 \\
r_2=458 \\
r_3=440 \\
\hline
r_1+r_2+r_3=1810=989+821
\end{array}
\end{array}$$

ainsi le reste de N divisé par 983 est 821

On a ainsi un caractère de divisibilité pour 989.

3. Prenons n négativement, alors

$$\begin{aligned}
N &= (p-n)\,q_1+r_1, \\
-nq_1 &= -(p-n)\,q_2-r_2, \\
nq_2 &= (p-n)\,q_3+r_3, \\
-nq_3 &= -(p-n)\,q_4-r_4, \\
\pm nq_{m-1} &= \pm(p-n)\,q_m \pm r_m,
\end{aligned}$$

d'où

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} N=(q_1-q_2+q_3\pm q_m)p+r_1+r_2+r_3+\ldots \\ \quad \pm r_m \mp nq_m. \end{array}\right.$$

On emploie cette formule lorsque p est trop éloigné d'une puissance de 10.

Soit, par exemple,

$$N=732865,\quad p=37,$$

on prendra

$$10^2 = 3.37 - 11,$$

$$\begin{array}{r}
7\,3\,2\,8{,}6\,5 \\
\underline{7\,3\,2\,8\phantom{{,}6\,5}} \\
8\,0\,6{,}0\,8 \\
\underline{8\,0\,6\phantom{{,}0\,8}} \\
8\,8{,}6\,6 \\
\underline{8\,8\phantom{{,}6\,6}} \\
9{,}6\,8 \\
9\,9\phantom{{,}6\,8}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
r_1 = 65, \quad r_2 = 8 \\
r_3 = 66, \quad r_4 = \underline{48} \\
 76 \\
\underline{r_5 = 99,} \\
 230 \\
 \underline{-\ 76} \\
 1{,}54 \\
 \underline{11} \\
 11
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
r'_1 = 55, \quad r'_2 = 11 \\
\underline{-\ 11} \\
43 \\
\underline{37} \\
6
\end{array}$$

Ainsi le reste de la division est 6.

En effet,

$$732865 = 37.19827 + 6.$$