NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Lieu géométrique de certain point dans les coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 163-165

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__163_1>

LIEU GÉOMÉTRIQUE DE CERTAIN POINT DANS LES CONIQUES.

1. Soit

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

l'équation d'une conique rapportée à des axes quelconques.

Supposons que le coefficient C varie de $-\infty$ à $+\infty$ et que les cinq autres coefficients soient des fonctions entières algébriques *données* de deux quantités α et β ;

$$dy + ex + f = 0$$
$$d_1 y + c_1 x + f_1 = 0,$$

sont les équations *données* de deux droites tangentes à la conique; il s'agit de trouver le lieu géométrique du point qui a pour coordonnées α et β.

L'équation de condition pour que la première droite soit tangente, est

$$4C[fdD - f^2A - d^2F] + d^2E^2 + e^2[D^2 - 4AF] + f^2B^2$$
$$+ 2de[2BF - DE] - 2fdBF + 2fe[2AE - BD] = 0.$$

(*Voir* les *Nouvelles Annales*, t. II, p. 108.)

On a une équation semblable pour la seconde droite.

Éliminant C, on trouve pour l'équation du lieu cherché

$$\left.\begin{array}{l}
AE^2[d^2f_1^2 - d_1^2f^2] \\
DE^2dd_1[d_1f - df_1] \\
F[D^2 - 4AF][e^2d_1^2 - e_1^2d] \\
A[D^2 - 4AF][e^2f_1^2 - e_1^2f^2] \\
D[D^2 - 4AF][e_1^2fd - e^2f_1d_1] \\
B^2F[f^2d_1^2 - f_1^2d^2] \\
B^2Dff_1[f_1d - fd_1] \\
2F[2BF - DE]dd_1[d_1e - de_1] \\
2A[2BF - DE][def_1^2 - d_1e_1f^2] \\
2D[2BF - DE]dd_1[e_1f - ef_1] \\
+ 2BEFdd_1[df_1 - d_1f] \\
+ 2BEAff_1[fd_1 - f_1d] \\
+ 2F[2AE - BD][fed_1^2 - f_1e_1d^2] \\
+ 2A[2AE - BD]ff_1[f_1e - fe_1] \\
+ 2D[2AE - BD]ff_1[de_1 - d_1e]
\end{array}\right\} = 0,$$

Lorsque $B = 0$ et que $D^2 - 4AF$ a un facteur commun en α et β avec E, le degré du lieu s'abaisse; de même si A a un facteur commun en α et β avec D.

Application. Soit

$$A = 1,\quad B = 0,\quad D = -2\beta,\quad E = -2\alpha,\quad F = \alpha^2 + \beta^2,$$

l'équation du lieu devient, après avoir divisé par α,

$$
(\mathrm{A})\quad \left\{
\begin{aligned}
&[e^2d_1^2]\alpha^3 + 2dd_1[de_1]\alpha^2\beta + [e^2d_1^2]\alpha\beta^2 + 2dd_1[de_1]\beta^3 \\
&\quad + 2\alpha^2[f_1e_1d^2] + 2[e^2f_1d_1]\alpha\beta + 2\beta^2[f_1e_1d^2] \\
&\quad + [d^2f_1^2]\alpha + 2\beta[ef' + e'f][df_1] + 2ff_1[f_1e].
\end{aligned}\right.
$$

Les termes du troisième degré peuvent se mettre sous la forme

$$[\alpha^2 + \beta^2][\alpha(e^2d_1^2] + 2\beta\, dd_1(de_1)];$$

ainsi il n'y a qu'une asymptote réelle (*).

Lieu du centre.

Ordonnant l'équation (A) par rapport à α, on a

$$(\mathrm{B})\qquad \mathrm{P}\alpha^3 + \mathrm{Q}\alpha^2 + \mathrm{R}\alpha + \mathrm{S} = 0;$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P} = [e^2d_1^2], \\
&\mathrm{Q} = 2dd_1[de_1]\beta + 2[f_1e_1d^2], \\
&\mathrm{R} = [e^2d_1^2]\beta^2 + [f_1d_1e^2] + [d^2f_1^2], \\
&\mathrm{S} = 2dd_1[de_1]\beta^3 + 2[f_1e_1d^2]\beta^2 + 2[ef_1 + e_1f)[df_1]\beta \\
&\qquad + 2ff_1[f_1e].
\end{aligned}
$$

désignons par α', α'', α''' les trois racines de l'équation (B) et par x, y les coordonnées du centre, on a

$$y = \beta,$$

et l'équation du lieu du centre est

$$\left(x - \frac{\alpha' + \alpha''}{2}\right)\left(x - \frac{\alpha' + \alpha'''}{2}\right)\left(x - \frac{\alpha'' + \alpha'''}{2}\right).$$

La théorie des fonctions symétriques donne

$$8\mathrm{P}^2x^3 - 8\mathrm{PQ}x^2 + 2x(\mathrm{RP} - \mathrm{Q}^2] + \mathrm{P}(\mathrm{QR} - \mathrm{S}) = 0,$$

dans laquelle on remplace β par y. Ainsi, on obtient une équation du troisième degré, en x et y ; ce qu'on pouvait prévoir à priori.

(*) *Cas particulier.* α, β, coordonnées du foyer ; axe des y directrice ; axes rectangulaires.