Nouvelles annales de mathématiques

Genocchi

Seconde solution de la question 457

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 161-163

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__161_1>

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 457

(voir page 125);

PAR M. GENOCCHI.

La série proposée est un cas particulier de la série hypergéométrique

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 . \gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 . 2 . \gamma(\gamma+1)} + \ldots,$$

que Gauss a considérée d'une manière générale et avec toute la rigueur désirable. Il a exprimé la somme de cette série par des fonctions *gamma*, et donné la condition nécessaire et suffisante de sa convergence qui est simplement la suivante

$$\alpha+\beta+\gamma \leqq 0.$$

En faisant

$$\alpha=\beta=-\frac{1}{2}, \quad \gamma=1,$$

on trouve la formule de M. Catalan.

On peut aussi la démontrer par la méthode de Parseval. On a

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1.1}{2.4}x^2-\frac{1.1.3}{2.4.6}x^3-\ldots,$$

$$\sqrt{1-x^{-1}}=1-\frac{1}{2}x^{-1}-\frac{1.1}{2.4}x^{-2}-\frac{1.1.3}{2.4.6}x^{-3}-\ldots,$$

séries qui sont convergentes *toutes les deux* lorsque le *module* analytique de x est l'unité. En multipliant, on obtient un résultat de cette forme

$$(1) \qquad \sqrt{2-(x+x^{-1})}=A+\sum Bx^m+\sum Cx^{-n},$$

où

$$A=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1.1}{2.4}\right)^2+\left(\frac{1.1.3}{2.4.6}\right)^2+\ldots.$$

Je fais maintenant

$$x=\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi,$$

je multiplie (1) par $d\varphi$ et j'intègre de $\varphi=0$ à $\varphi=2\pi$. Il vient

$$\sqrt{2-(x+x^{-1})}=\sqrt{2-2\cos\varphi}=2\sin\frac{1}{2}\varphi,$$

$$x^m=\cos m\varphi+\sqrt{-1}\sin m\varphi,$$

$$x^{-n}=\cos n\varphi-\sqrt{-1}\sin n\varphi,$$

et, par suite,

$$8 = \mathrm{A}.2\pi, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{A} = \frac{4}{\pi}.$$

On a une autre démonstration en multipliant l'équation

$$1 - \sqrt{1 - z^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{2} z^2 \sin^2 \varphi + \frac{1.1}{2.4} z^4 \sin^4 \varphi + \frac{1.1.3}{2.4.6} z^6 \sin^6 \varphi + \ldots$$

par $\frac{dz\,d\varphi}{z^2}$ et intégrant entre les limites $z = 0$, $z = 1$, $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Je remarquerai encore que Gauss a aussi transformé la série $F(\alpha, \beta, \gamma)$ en fraction continue, et en un produit d'une infinité de facteurs, mais qu'il n'est pas l'inventeur de la décomposition de l'intégrale eulérienne $B(p, q)$ en un nombre infini de facteurs : cette décomposition est due à Euler lui-même dont les formules et les méthodes sont rapportées par Lacroix dans le III volume de son grand Traité.