NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GERONO

De quelques questions d'analyse indéterminée

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 153-158

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__153_1>

DE QUELQUES QUESTIONS D'ANALYSE INDÉTERMINÉE.

(Fin d'un premier article, voir p. 122.)

II. Nous supposons maintenant que deux nombres Q et Q', entiers et positifs, vérifient l'équation $x^2 - ny^2 = 1$; ainsi, par hypothèse, on a l'égalité numérique

$$Q^2 - n.Q'^2 = 1.$$

Il s'agit de démontrer que l'expression fractionnaire $\frac{Q}{Q'}$ est nécessairement une réduite de rang pair de la fraction continue périodique qui représente la valeur de $\sqrt{n}$, et, qu'en outre, cette réduite correspond à l'avant-dernier quotient incomplet de l'une des périodes de la fraction continue.

Je considère, d'abord, le cas particulier où $Q' = 1$.

Dans ce cas, l'égalité supposée $Q^2 - nQ'^2 = 1$, devient $Q^2 - n = 1$, et donne $\sqrt{n} = \sqrt{Q^2 - 1}$.

Mais, en réduisant $\sqrt{Q^2 - 1}$ en fraction continue, on obtient

$$\sqrt{Q^2 - 1} = (Q - 1) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2(Q-1) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2(Q-1) + \text{etc.}}}}}$$

On voit donc que $\frac{Q}{Q'}$, ou $\frac{Q}{1}$, est précisément la seconde réduite $(Q - 1) + \frac{1}{1}$, de la fraction continue périodique qui représente la valeur de $\sqrt{n}$, et que cette réduite correspond à l'avant-dernier quotient incomplet d'une période, qui est ici la première.

En second lieu je suppose $Q' > 1$.

Les nombres Q et Q' sont premiers entre eux, la fraction $\frac{Q}{Q'}$ est irréductible, c'est ce qui résulte de l'égalité $Q^2 - nQ'^2 = 1$.

De plus, si l'on désigne par α le premier quotient incomplet de la réduction de $\sqrt{n}$ en fraction continue, α sera aussi le premier quotient incomplet de la fraction continue égale à $\frac{Q}{Q'}$. Car la relation $Q^2 - nQ'^2 = 1$ donne $\frac{Q}{Q'} = \sqrt{n + \frac{1}{Q'^2}}$, et il est clair que si $\sqrt{n}$ est compris entre les deux nombres entiers consécutifs α, $\alpha + 1$, il en sera de même de $\sqrt{n + \frac{1}{Q'^2}}$.

Ainsi, en convertissant, par la règle ordinaire l'expression commensurable $\frac{Q}{Q'}$ en fraction continue, on aura une égalité de la forme

$$\frac{Q}{Q'} = \left(\alpha + \cfrac{1}{a + \cfrac{\ddots}{+ \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q}}}}\right);$$

et le dénominateur q, de la dernière fraction intégrante $\frac{1}{q}$, sera plus grand que l'unité.

Si le nombre des quotients α, a,..., p, q, est impair, en remplaçant $\frac{1}{q}$ par $\cfrac{1}{(q-1)+\cfrac{1}{1}}$, il viendra

$$\frac{Q}{Q'} = \left(\alpha + \cfrac{1}{a + \cfrac{\ddots}{+ \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{(q-1) + \cfrac{1}{1}}}}}\right);$$

on peut donc, dans tous les cas, considérer les deux nombres Q et Q' comme les deux termes d'une réduite de rang pair, provenant d'une fraction continue

$$(1) \qquad \alpha + \cfrac{1}{a + \cfrac{\ddots}{+ \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \text{etc.}}}}}$$

dont le premier quotient incomplet est α, le dénominateur q de la dernière fraction intégrante $\frac{1}{q}$ de cette réduite pouvant, d'ailleurs, être égal à l'unité.

Cela posé, je désigne par $\frac{P}{P'}$ la réduite de rang impair qui se termine au quotient incomplet p précédant q dans la fraction continue (1). Il s'ensuit

$$QP' - PQ' = +1 \quad \text{et} \quad P' < Q', \quad P < Q:$$

de sorte que P' et P sont deux nombres entiers positifs moindres que Q' et Q et qui vérifient l'équation indéterminée du premier degré

$$Qz - Q'z' = +1.$$

Cette dernière équation admet aussi la solution entière

$$z = Q - \alpha Q', \quad z' = nQ' - \alpha Q,$$

car la substitution de ces valeurs de z et z' donne

$$\begin{aligned} Qz - Q'z' &= Q(Q - \alpha Q') - Q'(nQ' - \alpha Q) \\ &= Q^2 - nQ'^2 = +1. \end{aligned}$$

De plus, le nombre $Q - \alpha Q'$ est positif et moindre que Q' puisque la fraction $\frac{Q}{Q'}$ est comprise entre α et $\alpha + 1$. De même le nombre $nQ' - \alpha Q$ est positif et moindre que Q. Cela résulte simplement de ce que l'équation

$$Qz - Q'z' = +1$$

revient à

$$z' = \frac{Qz - 1}{Q'};$$

on voit qu'à une valeur entière de z positive moindre que Q' correspond une valeur de z' positive et plus petite que le nombre Q.

Or, on sait que l'équation indéterminée

$$Qz - Q'z' = +1$$

ne peut admettre qu'une seule solution entière positive, dans laquelle les valeurs des inconnues z et z' soient respectivement plus petites que les coefficients Q' et Q; on a donc

$$(2)\qquad P' = Q - \alpha Q',$$

$$(3)\qquad P = nQ' - \alpha Q.$$

Ces égalités établies, posons l'équation

$$(4)\qquad \sqrt{n} = \alpha + \cfrac{1}{a + \ddots + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{\alpha + x}}}};$$

d'où

$$\sqrt{n} = \frac{Q(\alpha + x) + P}{Q'(\alpha + x) + P'} = \frac{Q\alpha + P + Qx}{Q'\alpha + P' + Q'x}.$$

En ayant égard aux égalités (2) et (3), cette dernière équation se réduit à

$$\sqrt{n} = \frac{nQ' + Qx}{Q + Q'x}.$$

On en tire

$$x = \frac{Q\sqrt{n} - nQ'}{Q - Q'\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}.(Q - Q'\sqrt{n})}{Q - Q'\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Par suite l'équation (4) donne

$$\sqrt{n} = \alpha + \cfrac{1}{a + \ddots + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{2\alpha + \cfrac{1}{a + \text{etc.}}}}}};$$

résultat qui montre qu'effectivement la fraction $\frac{Q}{Q'}$ est une réduite correspondante à l'avant-dernier quotient incomplet d'une période de la fraction continue dont la valeur est $\sqrt{n}$. C'est ce qu'il fallait démontrer. G.