B. VERNIER

Solution de la question 459

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 148-150

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__148_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 459

(voir page 45);

PAR M. B. VERNIER,
Élève du lycée Napoléon.

J'appelle α et β les longueurs des deux perpendiculaires données, δ leur distance, $a, b, c, \ldots, l$ les moyennes géométriques.

On suppose $\alpha > \beta$.

La surface cherchée est

$$S = \frac{\delta}{p}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + a + b + c + \ldots + l\right).$$

Or

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \ldots = \frac{l}{p} = \frac{\alpha + a + b + c + \ldots + l}{a + b + c + \ldots + l + \beta} = \sqrt[p]{\frac{\alpha}{\beta}},$$

d'où

$$a + b + c + \ldots + l = \frac{\beta\sqrt[p]{\frac{\beta}{\alpha}} - \alpha}{1 - \sqrt[p]{\frac{\alpha}{\beta}}}$$

et

$$S = \frac{\delta}{p} \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\delta}{p} \cdot \frac{\beta \sqrt[p]{\frac{\alpha}{\beta}} - \alpha}{1 - \sqrt[p]{\frac{\alpha}{\beta}}}.$$

Je pose

$$1 - \sqrt[p]{\frac{\alpha}{\beta}} = m,$$

d'où

$$\frac{1}{p} = \frac{\log(1-m)}{\log\frac{\alpha}{\beta}},$$

logarithme dans une base quelconque, et

$$S = \frac{\delta}{p} \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} + \delta \frac{\beta \sqrt[p]{\frac{\alpha}{\beta}} - \alpha}{\log\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \log(1-m)^{\frac{1}{m}}.$$

$\sqrt[p]{\frac{\alpha}{3}}$ s'approche de l'unité et m s'approche de zéro; donc à la limite p croissant indéfiniment,

$$S = \delta . \frac{\beta - \alpha}{\log\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \log\frac{1}{e} = \delta . \frac{\alpha - \beta}{L\frac{\alpha}{\beta}} \text{ (log népérien).}$$

Note. MM. J. C. Dupain et de Chardonnet ont traité la même question de la même manière, et en y ajoutant la formule de quadrature par intégration de la logarithmique.

Les abscisses croissant en progression arihmétique et les ordonnées en progression géométrique, il est intuitif que les premières sont les logarithmes des secondes. C'est la considération dont s'est servi M. Rouquet, régent de mathématiques au collége de Castres.

MM. Bouterg, de Clermont; Stéphart, élève du lycée Charlemagne; Français (Émile) et A. Puget, élèves du lycée de Caen; Challiot, élève du lycée de Versailles; Lemoine, élève du Prytanée, ont eu recours à la limite d'une progression géométrique.