NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ABEL TRANSON

Sur le nombre des points multiples d'une courbe algébrique ; rectification d'un précédent article

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 142-147

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__142_1>

SUR LE NOMBRE DES POINTS MULTIPLES D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE;

Rectification d'un précédent article;

PAR M. ABEL TRANSON.

J'ai montré dans ce Journal (mars 1851, t. X, p. 91) que le nombre des points doubles d'une courbe algébrique de degré n ne peut pas surpasser le nombre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Dans un Mémoire publié à Rome dans le mois de mai 1852 (*Annali di Scienze Matematiche e Fisiche*), Mémoire que M. Terquem vient de me communiquer, l'auteur, M. Fortunato Padula, démontre à sa manière le même théorème qui, d'après ce qu'il nous apprend, avait été primitivement énoncé par M. Steiner, et dont M. Padula avait déjà publié une démonstration en 1844.

J'avais à la même occasion donné trois autres formules, l'une pour la limite supérieure du nombre des points multiples dont le degré de multiplicité est au moins égal à μ, c'est-à-dire où le nombre des branches qui se rencontrent est au moins μ; l'autre pour le nombre des points de degré μ, lorsque les μ branches s'y touchent au lieu de s'y traverser; la troisième pour le nombre des points où, sur μ branches qui se rencontrent, il y en a μ' qui se touchent.

M. Padula, dans le Mémoire ci-dessus indiqué, conteste l'exactitude de ces trois formules. Je reconnais la validité de sa critique quant aux deux dernières. Je les rectifierai donc tout à l'heure, et on verra que, pour réparer mon inadvertance, je n'aurai pas besoin de recourir à un autre principe que celui sur lequel j'avais fondé mes recherches. Quant à ma première formule, j'ai lieu de croire que M. Padula n'a pas lu bien attentivement cette partie de mon travail.

Voici en effet ce que je disais pour trouver, dans une courbe algébrique de degré n, le nombre des points dont la multiplicité est au moins égale à μ.

« Le nombre des points du degré de multiplicité μ ne saurait atteindre celui des points qui déterminent une courbe de degré $\frac{2n}{\mu} - 2$. (Si cette formule $\frac{2n}{\mu} - 2$ donne un nombre fractionnaire, entendez alors que le nombre des points en question ne peut pas atteindre celui des points qui déterminent la courbe dont le degré surpasse immédiatement $\frac{2n}{\mu} - 2$). Cela résulte de la relation

$$\mu . \frac{\left(\frac{2n}{\mu} - 2\right)\left(\frac{2n}{\mu} + 1\right)}{2} > \left(\frac{2n}{\mu} - 2\right) n,$$

où le premier membre de l'inégalité représente le nombre des rencontres nécessaires que la proposée aurait avec une courbe de degré $\frac{2n}{\mu} - 2$ passant par des points de multiplicité μ en nombre

$$\frac{\left(\frac{2n}{\mu} - 2\right)\left(\frac{2n}{\mu} + 1\right)}{2}.$$

» On est donc assuré de pouvoir placer tous les points en question sur une courbe du degré $\frac{2n}{\mu} - 2$. Chacun de ces points entrera pour une seule unité dans le nombre des points déterminants de la courbe auxiliaire; mais il déterminera μ rencontres; de sorte qu'en appelant y le nombre des points cherchés, on a la relation

$$\frac{\left(\frac{2n}{\mu} - 2\right)\left(\frac{2n}{\mu} + 1\right)}{2} + (\mu - 1)y \leqq \left(\frac{2n}{\mu} - 2\right)n,$$

d'où on tire pour y la formule suivante

$$y \leqq \frac{(n - \mu)[2n(\mu - 1) - \mu]}{(\mu - 1)\mu^2} \; (1). \text{ »}$$

On voudra bien remarquer que j'avais expressément réservé le cas où $\frac{2n}{\mu} - 2$ étant un nombre fractionnaire ne pourrait pas représenter le degré d'une courbe. Mais dans ce cas-là même mon principe ne me faisait pas défaut, et je l'énonçais avec la modification convenable, puisque je disais formellement que le degré de la courbe auxiliaire serait alors le nombre entier immédiatement supérieur à $\frac{2n}{\mu} - 2$. Avec cette indication, le lecteur que cela intéresserait pouvait construire la formule relative au cas réservé (**).

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. X, p. 96. Cette citation peut offrir quelque obscurité au lecteur qui n'aura pas sous les yeux le reste de l'article. Mais cette obscurité se dissipera à l'aide des explications données plus loin pour la rectification des deux dernières formules.

(**) Soit α le nombre entier égal ou bien immédiatement supérieur à $\frac{2n}{\mu} - 2$, selon que cette expression est un nombre entier ou fractionnaire;

Malheureusement ces réserves et ces indications ont été insuffisantes. Après avoir trouvé de son côté une formule qui, lorsque $\frac{2n}{\mu}$ est un nombre entier, coïncide exactement avec la mienne, ainsi qu'il a soin de le déclarer lui-même, M. Padula met ma formule en défaut, précisément lorsque $\frac{2n}{\mu}$ est un nombre fractionnaire. Par ce moyen il me fait trouver qu'une courbe du cinquième degré n'admet jamais un point multiple du quatrième degré de multiplicité, tandis qu'une courbe du septième degré pourrait en admettre deux. Mais c'est un résultat qu'il m'attribue fort gratuitement.

De mon côté, pour être parfaitement juste, je me plais à reconnaître que, quand ma formule ne coïncide pas avec celle de M. Padula, c'est-à-dire lorsque $\frac{2n}{\mu}$ est fractionnaire, la limite que je trouve est moins avantageuse que la sienne.

Et maintenant j'arrive à la rectification de mes deux dernières formules.

Soit y le nombre des points multiples dont le degré de multiplicité est au moins égal à μ, mais où les μ branches de la courbe se touchent au lieu de se traverser.

Soit 2α le nombre égal à $\frac{n}{\mu} - 1$, si cette dernière ex-

---

le nombre y des points cherchés ne saurait atteindre la limite $\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}$. On peut donc prendre sur la courbe donnée un nombre de points égal à $\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}$ parmi lesquels se trouveront les points cherchés, et y faire passer une courbe de degré α. Celle-ci aura avec la proposée un nombre de rencontres égal à $\frac{\alpha(\alpha+3)}{2} + (\mu - 1)y$; nombre qui ne peut pas dépasser $n\alpha$. D'où il résulte qu'on a $y \leqq \frac{\alpha(2n - \alpha - 3)}{2(\mu - 1)}$, formule qui se ramène à celle du texte lorsqu'on y remplace α par $\frac{2n}{\mu} - 2$.

pression est un nombre pair; ou bien soit 2α le nombre pair immédiatement supérieur à $\frac{n}{\mu} - 1$ si celui-ci est impair ou fractionnaire.

Je dis que le nombre y des points cherchés est nécessairement moindre que $\alpha\,(4\alpha+3)$, c'est-à-dire moindre que la moitié du nombre des conditions qui déterminent une courbe du degré 4α. Supposons en effet qu'on puisse avoir $y=\alpha\,(4\alpha+3)$; alors on pourrait, par tous ces points, faire passer une courbe du degré 4α avec la condition que cette courbe auxiliaire aurait en chacun de ces points même tangente que la proposée; car ce serait imposer $2\alpha\,(4\alpha+3)$ conditions. Mais alors le nombre des rencontres serait au moins égal à $2\mu\alpha\,(4\alpha+3)$, expression que j'écris comme il suit :

$$4\alpha\left[2\mu\alpha+\frac{3}{2}\mu\right],$$

ce qui, à cause de $2\mu\alpha \gtreqless n-\mu$, donnerait un nombre de rencontres au moins égal à $4\alpha\,(n+\frac{1}{2}\mu)$, c'est-à-dire un nombre supérieur au produit des degrés des deux équations.

Maintenant prenons sur la courbe un nombre de points égal à $\alpha(4\alpha+3)$, parmi lesquels nous aurons choisi tous les points cherchés en nombre y. Construisons une courbe du degré 4α qui passe par ces points et qui y touche la courbe donnée; le nombre total des rencontres, comparé au produit du degré des équations, donnera

$$2\alpha\,(4\alpha+3)+2\,(\mu-1)\,y \leqq 4\alpha n,$$

d'où on tire la formule

$$y \leqq \frac{2\alpha(n-4\alpha-3)}{\mu-1}.$$

Par des considérations semblables on trouvera, pour le nombre z des points dont la multiplicité est μ et où μ' branches se touchent,

$$z \leqq \frac{2\alpha(2n - 4\alpha - 3)}{\mu + \mu' - 2},$$

formule dans laquelle 2α représente le nombre pair égal ou immédiatement supérieur à $\frac{2n}{\mu + \mu'} - 1$.