F. Brioschi

Sur quelques propriétés des surfaces du troisième ordre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 138-142

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__138_1>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES SURFACES DU TROISIÈME ORDRE;

D'APRÈS M. F BRIOSCHI.

1. Sur une surface du troisième degré (*) existent, en général, 27 droites (**). M Cayley a démontré que ces

(*) Extrait des *Annali di Scienze matematiche e fisiche,* da Barnaba Tortolini, t. VI, 1855.

(**) La découverte de ces 27 lignes appartient à M. Hart (*Dublin Journal*).

27 droites forment 45 groupes chacun de trois droites dans un même plan ; autrement une surface du troisième degré a 45 plans tangents qui touchent la surface, chacun suivant trois droites. Il est évident que chacune des droites est dans ciuq des 45 plans; de sorte que les 45 plans peuvent se partager en 9 faisceaux de 5 plans chacun (p. 136).

M. Hart a donné une notation très-commode pour indiquer les 27 droites et les 45 plans.

Les droites sont représentées par les 27 lettres

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1, & B_1, & C_1; & A_2, & B_2, & C_2; & A_3, & B_3, & C_3; \\ a_1, & b_1, & c_1; & a_2, & b_2, & c_2; & a_3, & b_3, & c_3; \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1; & \gamma_2, & \beta_2, & \alpha_2; & \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3; \end{array}$$

18 plans sont représentés en unissant dans chaque ligne horizontale trois mêmes lettres avec des indices différents ou trois lettres différentes avec les mêmes indices; ainsi la ligne des A donne les six plans

$$A_1 A_2 A_3,\quad B_1 B_2 B_3,\quad C_1 C_2 C_3,\quad A_1 B_1 C_1,\quad A_2 B_2 C_2,\quad A_3 B_3 C_3.$$

De même la ligne des a et des α.

Les 27 autres plans sont

$$\begin{array}{lll} A_1 a_1 \alpha_1, & B_1 b_1 \beta_1, & C_1 c_1 \gamma_1, \\ \quad b_2 \beta_2, & \quad c_2 \gamma_2, & \quad a_2 \alpha_2, \\ \quad c_3 \gamma_3, & \quad a_3 \alpha_3, & \quad b_3 \beta_3, \\ A_2 c_2 \beta_3, & B_2 a_2 \gamma_3, & C_2 b_2 \alpha_3, \\ \quad a_3 \gamma_1, & \quad b_3 \alpha_1, & \quad a_3 \beta_1. \\ \quad b_1 \alpha_2, & \quad c_1 \beta_2, & \quad c_1 \gamma_2, \\ A_3 b_3 \gamma_2, & B_3 c_3 \alpha_2, & C_3 a_3 \beta_2, \\ \quad a_1 \alpha_3, & \quad a_1 \beta_3, & \quad b_1 \gamma_3, \\ \quad c_2 \beta_1, & \quad b_2 \gamma_1, & \quad c_2 \alpha_1. \end{array}$$

La droite A_1 est rencontrée par les dix lignes

$$\text{(M)} \qquad A_2 A_3 B_1 C_1 a_1 b_2 c_3 \alpha_1 \beta_2 \gamma_3;$$

la droite A_1 n'est pas rencontrée par les seize lignes

$$(\mathrm{N}) \qquad B_2\, B_3\, C_2 C_3\, a_2 a_3\, b_1\, b_3\, c_1\, c_2\, \alpha_2\, \alpha_3\, \beta_1\, \beta_3\, \gamma_1\, \gamma_2.$$

Chaque ligne de la série (N) est rencontrée par 5 de la série M et par 5 de la série N.

Ainsi B_2 est rencontrée par

$$A_2\, B_1\, \alpha_1\, \beta_2\, \gamma_3 \text{ de la série (M),}$$

et par

$$B_3\, C_2\, a_2\, b_3\, c_1 \text{ de la série (N).}$$

Les 16 droites de la série (N) combinées deux à deux donnent 120 couples de droites ; le cinquième de ces couples sont des droites qui se rencontrent ; il y a donc 40 couples où les droites se rencontrent, et 80 couples où il n'y a pas de rencontre ; chacun de ces 80 couples n'est pas rencontré non plus par la droite A_1. Il y a donc 80 ternes de droites où il n'y a pas de rencontre.

2. Ce qu'on dit de A_1 s'applique à toute autre droite ; il y a donc $\frac{10.27}{2} = 135$ couples de droites qui se coupent ; $\frac{16.27}{2} = 216$ couples de droites qui ne se coupent pas, et, par conséquent, $\frac{216.10}{2} = 720$ ternes de droites qui ne se coupent pas.

Nous appelons *terne* trois droites qui ne se coupent pas.

3. *Ternes conjugués.* Soit le terne $\alpha_1 \beta_3 \gamma_2$ formé de droites qui ne se coupent pas, et de même le terne $a_1 b_3 c_2$; mais chacune de ces dernières droites coupe les trois premières droites : ces deux ternes sont des conjugués et sont, par conséquent, sur une hyperboloïde à une nappe.

Hexagones conjugués. Deux ternes conjugués donnent naissance à trois hexagones où les côtés opposés se rencontrent; par exemple les deux ternes précédents donnent les trois hexagones conjugués

$$a_1\,\alpha_1\,b_3\,\beta_3\,c_2\,\gamma_2,$$
$$a_1\,\beta_3\,b_3\,\gamma_2\,c_2\,\alpha_1,$$
$$a_1\,\gamma_2\,b_3\,\alpha_1\,c_2\,\beta_3.$$

4. *Groupes opposés.* Considérant un terne on trouve 6 autres droites dont aucune ne rencontre le terne, et ces 6 droites se partagent en deux ternes.

Exemple. Soit le terne $\alpha_1\beta_3\gamma_2$; aucune de ces droites n'est coupée par les 6 droites $b_1\,c_1\,a_2\,b_2\,a_3\,c_3$; ces six droites se partagent en deux ternes $a_2\,b_1\,c_3$, $a_3\,b_2\,c_1$; ces deux ternes sont dits opposés au terne $\alpha_1\beta_3\gamma_2$.

Les groupes opposés à deux ternes conjugués sont eux-mêmes des ternes conjugués.

Exemple. $\alpha_1\beta_3\gamma_2$, $a_1\,b_3\,c_2$ sont des ternes conjugués; les groupes opposés au premier terne sont

$$a_2\,b_1\,c_3,$$
$$a_3\,b_2\,c_1,$$

les groupes opposés au second sont

$$\alpha_2\,\beta_1\,\gamma_3,$$
$$\alpha_3\,\beta_2\,\gamma_1,$$

qui constituent des ternes conjugués.

Dans cet exemple les trois hexagones opposés sont

$$a_1\,\alpha_1\,b_3\,\beta_3\,c_2\,\gamma_2,$$
$$a_2\,\alpha_2\,b_1\,\beta_1\,c_3\,\gamma_3,$$
$$a_3\,\alpha_3\,b_2\,\beta_2\,c_1\,\gamma_1.$$

Le célèbre géomètre donne encore d'autres considérations du même genre. M. Schläffli, profond analyste de l'Université de Berne, a traité la même question (*Quar-*

terly Journal; mai 1857, p. 65 et 110) et divise la surface en espèces d'après le nombre de *droites réelles et imaginaires*.

Nous ne comprenons pas encore suffisamment cet important travail pour en faire une exposition; nous en rendrons compte si nous parvenons à le bien comprendre.