Nouvelles annales de mathématiques

J. de Virieu

Solution de la question 457

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 125-129
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__125_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 457

(voir tome XVII, page 434),

PAR M. J. DE VIRIEU.

La formule proposée est un cas particulier de la seconde des formules suivantes :

$$\frac{+3\delta-4\mathrm{R}}{12}\cdot\pi=\left\{\begin{array}{l}+\dfrac{6\delta-13\mathrm{R}}{9}+\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{3}\right)+(\mathrm{R}+\delta)\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{5}\right)\\ +(\mathrm{R}+2\delta)\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{4}{7}\right)+\ldots\\ +(\mathrm{R}+n\delta)\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{5}\cdots\dfrac{2n-2}{2n+1}\,\dfrac{2n-2}{2n+3}\,\dfrac{2n}{2n-3}\right)\\ +\ \ldots \text{ à l'infini,}\end{array}\right.$$

et

$$(4R+\delta)\cdot\frac{1}{\pi}=\left\{\begin{array}{l} R+(R+\delta)\left(\frac{1}{2}\right)^2+(R+2\delta)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)^2 \\ +(R+3\delta)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\right)^2+\cdots \\ +[R+(n+1)\delta]\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n+2}\right)^2 \\ +\ldots \text{ à l'infini,} \end{array}\right\}$$

où R et δ représentent des constantes quelconques, n une variable positive croissant indéfiniment à partir de zéro, et dont les accroissements successifs sont égaux à 1.

Ces formules se déduisent de l'expression due à Wallis,

$$\frac{\pi}{2}=\lim\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots \text{ à l'infini.}$$

En effet, posons

$$u_n=\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdots\left(\frac{2n+2}{2n+1}\cdot\frac{2n+2}{2n+3}\right),$$

$$v_n=\frac{2}{1}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdots\left(\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n+2}{2n+1}\right),$$

$$t_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)\cdots\left(\frac{2n+1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\right),$$

$$z_n=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\cdots\left(\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{2n+3}{2n+2}\right).$$

En vertu de l'expression de Wallis, on a

$$u_n<\frac{\pi}{2}<v_n,\qquad t_n<\frac{2}{\pi}<z_n;$$

et pour

$$n=+\infty,\quad \lim u_n=\frac{\pi}{2}=\lim v_n,\quad \lim t_n=\frac{2}{\pi}=\lim z_n,$$

on a

$$\Delta u_n = + \frac{1}{(2n+3)(2n+5)} u_n = \frac{1}{2n+5} \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} \cdots \frac{2n+2}{2n+3}\right)^2,$$

$$\Delta v_n = - \frac{1}{(2n+3)^2} \cdot v_n = - \frac{1}{2n+2} \cdot \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} \cdots \frac{2n+2}{2n+3}\right)^2,$$

$$\Delta t_n = + \frac{1}{(2n+2)(2n+4)} \cdot t_n = + (2n+4) \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6} \cdots \frac{2n+1}{2n+4}\right)^2,$$

$$\Delta z_n = - \frac{1}{(2n+4)^2} z_n = - (2n+3) \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6} \cdots \frac{2n+1}{2n+4}\right)^2.$$

Mais on a

$$y_n = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 + \ldots + \Delta y_{n-1}.$$

Remplaçant y successivement par u, v, t, z, on a

$$u_n = \frac{4}{3} + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{7}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2n+1}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1}\right)^2,$$

$$v_n = 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)^2 + \ldots$$
$$- \frac{1}{2n}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1}\right)^2,$$

$$t_n = \frac{1}{2} + 4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\right)^2 + \ldots$$
$$+ (2n+2)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n+2}\right)^2,$$

$$z_n = \frac{3}{4} - 3\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\right) - \ldots$$
$$- (2n+1)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n+2}\right)^2.$$

a, b, f, g étant des constantes, l'on a

$$au_n + bv_n = \left\{\begin{array}{l} + \left(\frac{4}{3}a + 3b\right) - 3b\left(\frac{1}{3}\right) \\ + (2a - 5b)\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\right) \\ + (4a - 7b)\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}\right) + \dots \\ + [2na - (2n+3)b] \\ \times\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n+1}\,\frac{2n-2}{2n+1}\,\frac{2n}{2n+3}\right) \end{array}\right\},$$

$$ft_n + gz_n = \left\{\begin{array}{l} + g + (2f - g)\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ + (4f - 3g)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)^2 \\ + (6f - 5g)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\right)^2 + \dots \\ + [(2n+2)f - (2n+1)g] \\ \times\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n+2}\right)^2 \end{array}\right\}.$$

Posons dans la première équation $a = \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{3}R$, $b = -\frac{1}{3}R$, et dans la deuxième, $g = R$, $f = R + \frac{1}{2}\delta$, on obtient

$$\frac{(3\delta - 2R)u_n - 2Rv_n}{6} = \left\{\begin{array}{l} + \frac{6\delta - 13R}{9} + R\left(\frac{1}{3}\right) \\ + (R + \delta)\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\right) \\ + (R + 2\delta)\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}\right) + \dots \\ + (R + n\delta) \\ \times\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n+1}\,\frac{2n-2}{2n+1}\,\frac{2n}{2n+3}\right) \end{array}\right\};$$

et

$$\frac{(3R+\delta)t_n+2Rz_n}{2}=\left\{\begin{array}{l}+R+(R+\delta)\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\\ +(R+2\delta)\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}\right)^2\\ +(R+3\delta)\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{6}\right)^2+\ldots\\ +[R+(n+1)\delta]\\ \times\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n+2}\right)^2\end{array}\right\}.$$

En passant aux limites (p. 126), on a les formules annoncées au commencement de cet article. Faisant

$$\delta=0,\quad R=1,$$

on a la solution de la question 457.

Note. M. Hatterer (J.), maître répétiteur au lycée de Clermont-Ferrand, donne une solution déduite aussi de l'expression Wallis.