Nouvelles annales de mathématiques

Équations résultant de diverses éliminations ; d'après Bezout

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 120-122

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__120_1>

ÉQUATIONS RÉSULTANT DE DIVERSES ÉLIMINATIONS;

D'APRES BEZOUT.

---

1. Pour opérer l'élimination, Bezout a le premier indiqué la méthode des *polynômes multiplicateurs*, méthode la plus générale, la plus complète, la plus philosophique, la seule qui soit entièrement satisfaisante. Toutefois on n'en parle nulle part. C'est qu'on ne lit pas l'ouvrage où cette méthode est consignée. Auteur d'ouvrages élémentaires, modèles jamais égalés en clarté et en élégance, Bezout a négligé ces deux qualités dans son ouvrage fondamental, dans sa *Théorie générale des équations* (1779), chef d'œuvre d'analyse, dont Jacobi faisait un très-grand cas, et qui renferme toutes les prétendues nouveautés en fait d'élimination, entre autres le théorème (p. 342, n° 402), et en partie aussi pour les déterminants (p. 388 et suivantes). Par des questions préparatoires, nous essayerons, *volente Deo*, de faire connaître cette méthode. En attendant, nous donnons ici quelques résultats qui seront souvent consultés.

2. *Notation*. Les lettres a, b, c, ..., désignent des fonctions quelconques, d'un nombre *quelconque* de variables $(a\,b') = (ab' - a'\,b)$; $(ab'\,c'')$ désignent des déterminants.

R désigne l'équation résultant de l'élimination.

Premier exemple.

$$ax + b = 0,$$
$$a'\,x + b' = 0,$$
$$(\mathrm{R}) \quad (a\,b') = 0.$$

Deuxième exemple (p. 300) (*).

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$a'\,x^2 + b'\,x + c' = 0,$$
$$(\mathrm{R}) \quad (ab')\,(bc') - (ac')^2 = 0.$$

Troisième exemple (p. 300).

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$
$$a'\,x^3 + b'\,x^2 + c'\,x + d' = 0,$$
$$(\mathrm{R}) \quad \left.\begin{array}{l} [(ab')\,(bc') - (ac')^2 + (ad')\,(ab')]\,(cd') \\ + [(ab')\,(bd') - (ac')(ad')]\,(bd') \\ + [(ab')\,(cd') - (ad')^2]\,(ad') \end{array}\right\} = 0.$$

Quatrième exemple (p. 319).

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$
$$d'\,x + e'\,y + f' = 0,$$
$$d''\,x + e''\,y + f' = 0,$$
$$(\mathrm{R}) \quad c\,(d'f'')^2 + (d'\,e'')\,(de'\,f'') - b\,(c'f'')\,(d'f'') + a\,(c'\,f'')^2 = 0.$$

Si

$$(d'\,e'') = 0,$$

(*) Ces pages sont celles de l'ouvrage de Bezout.

alors on a

$$(\mathrm{R})\quad (e'f'') = 0.$$

Cinquième exemple (p. 325).

$$axy + bx + cy + d = 0,$$
$$a'xy + b'x + c'y + d' = 0,$$
$$a''xy + b''x + c''y + d'' = 0.$$
$$(\mathrm{R})\quad (ab'c'')(bc'd'') - (ac'd'')(ab'd'') = 0.$$

Sixième exemple (p. 326).

$$ax^2 + bxy + cx + dy + e = 0,$$
$$a'x^2 + b'xy + c'x + d'y + e' = 0,$$
$$a''x^2 + b''xy + c''x + d''y + e'' = 0.$$
$$\begin{aligned}(\mathrm{R})\quad & [(abc'')(bc'd'') - (ab'd'')(ac'd'') + (ab'c'')(ab'd'')](cd'e'') \\ & + [(ab'c'')(bd'e'') - (ab'd')(ad'e'')](ad'e'') \\ & + [(ab'c'')(bc'e'') - (ab'c'')(ac'e'') - (ab'c'')^2](bd'e'') = 0.\end{aligned}$$