Théorèmes généraux segmentaires, courbes planes et surfaces

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 111-116

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__111_1>

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SEGMENTAIRES, COURBES PLANES ET SURFACES.

---

1. Soit

$$N = 0$$

l'équation d'une ligne plane de degré n; par un point A situé dans le plan de la courbe menons deux transversales.

Soient

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_n$$

les angles formant les n asymptotes (réels ou imaginaires) de la courbe avec la première transversale, et

$$\beta_1, \quad \beta_2, \ldots, \quad \beta_n$$

les angles que forment ces asymptotes avec la seconde transversale

$$p_2, \quad p_2, \ldots, \quad p;$$

les n distances au point A des points d'intersection de la première transversale avec la courbe,

$$q_1, \quad q_2, \ldots, \quad q_n$$

les n distances au point A des points d'intersection de la deuxième transversale, on a

$$\frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \ldots \sin \alpha_n}{\sin \beta_1 \sin \beta_2 \ldots \sin \beta_n} = \frac{p_1 p_2 \ldots p_n}{q_1 q_2 \ldots q_n}.$$

Démonstration. Prenons les deux transversales pour axes des x et des y; les deux membres de l'équation sont exprimés chacun par le même quotient $\frac{C}{A}$, A étant le coefficient de la plus haute puissance de y et C le coefficient de la plus haute puissance de x.

Corollaire. Si dans deux courbes planes de degrés quelconques, rapportées aux mêmes axes, le quotient $\frac{C}{A}$ est le même, le membre à droite de l'équation est le même dans les deux, ce qui donne une relation segmentaire.

Observation. Tant que les transversales ne changent pas de direction l'équation subsiste; c'est le théorème segmentaire de Newton que Carnot a étendu à des transversales formant un polygone.

2. En faisant

$$y = 0$$

dans l'équation

$$N = 0,$$

on a évidemment

$$fx = C(x - p_1)(x - p_1)(x - p_2) \ldots (x - p_n),$$

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont les points racines de Gauss.

Si l'on prend sur l'axe des x, à partir de l'origine, un point B tel que $AB = r$, on a

$$f(r) = C(r - p_1)(r - p_2) \ldots (r - p_n),$$

$r - p_1$, $r - p_2, \ldots$, sont les distances points-racines au point B.

3. Soient données un nombre *quelconque* de courbes algébriques de degré *quelconque* situées dans le même plan. Pour fixer les idées, nous ne prendrons que quatre courbes données par les équations en x, y :

$$P = 0,$$
$$Q = 0,$$
$$R = 0,$$
$$S = 0,$$

de degrés respectifs n_1, n_2, n_3, n_4, où n_4 est le nombre le plus grand; formons cette cinquième courbe qui sera aussi de degré n_4 :

$$\lambda_1 P + \lambda_2 Q + \lambda_3 R + \lambda_4 S = 0;$$

les λ sont des constantes arbitraires. Désignons par p, q, r, s ce que deviennent P, Q, R, S en posant $y = 0$, alors la même supposition donne

$$\lambda_1 p + \lambda_2 q + \lambda_3 r + \lambda_4 s = 0 \quad (1),$$

p, q, r, s sont des fonctions de x seulement.

Désignons par p_t, q_t, r_t, s_t ce que deviennent p, q, r, s en prenant $x = t$; soient α, β, γ, δ quatre *points-racines* de l'équation (1), on a

$$\lambda_1 p_\alpha + \lambda_2 q_\alpha + \lambda_3 r_\alpha + \lambda_4 s_\alpha = 0,$$
$$\lambda_1 p_\beta + \lambda_2 q_\beta + \lambda_3 r_\beta + \lambda_4 s_\beta = 0,$$
$$\lambda_1 p_\gamma + \lambda_2 q_\gamma + \lambda_3 r_\gamma + \lambda_4 s_\gamma = 0,$$
$$\lambda_1 p_\delta + \lambda_2 q_\delta + \lambda_3 r_\delta + \lambda_4 s_\delta = 0.$$

Éliminant les λ on a la relation

$$\text{Déterminant} \begin{Bmatrix} p_\alpha, & q_\alpha, & r_\alpha, & s_\alpha \\ p_\beta, & q_\beta, & r_\beta, & s_\beta \\ p_\gamma, & q_\gamma, & r_\gamma, & s_\gamma \\ p_\delta, & q_\delta, & r_\delta, & s_\delta \end{Bmatrix} = 0.$$

Or tous ces termes sont des *produits segmentaires* dans les courbes P, Q, R, S (*voir* p. 112).

On a donc ici une relation segmentaire *générale* indépendante des λ et s'appliquant à toutes les cinquièmes courbes formées par *voie d'addition*.

Les quatre valeurs α, β, γ, δ sont susceptibles de six combinaisons binaires; on a ainsi *six* de ces *relations segmentaires*, lesquelles ayant quelques segments communs, fournissent d'autres relations où le nombre des segments est diminué.

Les n_4 donnent $\frac{n_4(n_4-1)(n_4-2)(n_4-3)}{1.2.3\,4}$ combinaisons; on a donc généralement parlant $\frac{n_4(n_4-1)(n_4-2)(n_4-3)}{4}$ relations segmentaires.

Remarque. Quatre quelconque de ces cinq équations des courbes étant données, la cinquième s'en déduit par *voie d'addition*. Soit

$$\lambda P + \lambda_2 Q + \lambda_3 R + \lambda_4 S = T = 0,$$

on déduit

$$P = \frac{T}{\lambda} - \frac{\lambda_2}{\lambda} Q - \frac{\lambda_3}{\lambda} R - \frac{\lambda_4}{\lambda} S.$$

4. En prenant seulement deux courbes $P = 0$, $Q = 0$, ces courbes et la troisième qui en dérive passent par les mêmes $n_1 n_2$ points.

Si

$$n_1 = n_2 = 2,$$

on a trois coniques, et la relation segmentaire est connue sous le nom d'*involution*. Desargues l'a énoncée le premier pour les trois couples de droites du quadrilatère complet; Sturm l'a étendue aux coniques.

5. Prenant un point fixe dans le plan des cinq courbes,

les équations des polaires de quantième quelconque, relativement à ces cinq courbes, ont la même dépendance que les équations des courbes, c'est-à-dire que l'une quelconque peut être formée par voie d'addition au moyen des quatre autres; donc le théorème segmentaire s'applique à ces polaires.

6. $\frac{dP}{dx} + \frac{dP}{dy} = 0$ est la courbe de degré $n_1 - 1$ renfermant les $(n_1 - 1)^2$ pôles de la droite située à l'infini. On voit que les cinq courbes qu'on forme ainsi jouissent encore de la propriété segmentaire.

7. Soient

$$\begin{aligned} P &= A\,y^{n_1} + \ldots + F_1, \\ Q &= A\,y^{n_2} + \ldots + F_2, \\ R &= A\,y^{n_3} + \ldots + F_3, \\ S &= A\,y^{n_4} + \ldots + F_4, \end{aligned}$$

désignant par T la cinquième courbe variable, on a

$$T = A\,y^{n_4} + \ldots + F_5,$$

d'où (p. 113)

$$F_5 = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F + \lambda_4 F_4.$$

Si

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4,$$

alors

$$F_5 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\,F_1.$$

Si l'on prend

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1;$$

on a aussi

$$F_5 = F_1.$$

Alors le produit des distances à l'origine des points-racines situés sur l'axe des y est le même dans toutes ces courbes. Lorsqu'il n'y a que deux courbes P et Q, on peut toujours choisir sur l'axe des y une origine telle que F_2 devient égale à F_1. Lorsque les deux courbes sont des coniques, cette origine porte le nom de *centre d'involution.*

8. P, Q, R, S pouvant représenter des surfaces, on vient à des conclusions analogues.

Note. Nous ne possédons qu'une géométrie *étriquée;* quand aurons-nous une géométrie finitésimale, infinitésimale, embrassant toute l'étendue? C'est la tâche et même le besoin de l'avenir : car la besogne s'allonge et nullement la vie; les divers genres d'ambitions, forces motrices intérieures et extérieures de la société actuelle, laissent peu de place à la vie méditative et même aux soins de la vie physique. La limite assignée par M. Flourens restera encore longtemps parmi les *pia desideria.* Cependant cette limite a probablement existé dans les temps primitifs; elle est assignée de Dieu, cent vingt ans (Genèse, V, 3).