NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. DEWULF

Seconde solution de la question 195

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 79-81

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__79_0>

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 195

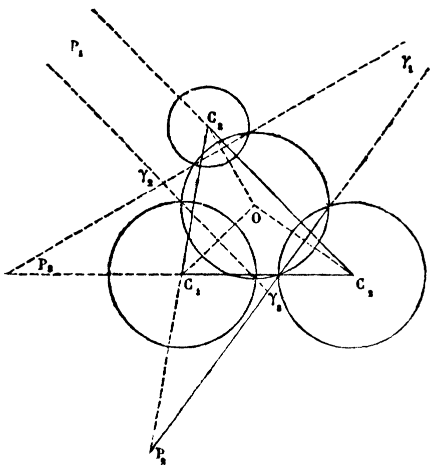
(voir t. XI, p. 198);

PAR M. L. DEWULF.

On donne trois cercles C_1, C_2, C_3; on trace trois nouveaux cercles, P_1 ayant même sécante commune que C_2 et C_3, et coupant C_1 orthogonalement; de même P_2 et P_3. Demontrer que ces trois nouveaux cercles ont même corde (réelle ou idéale) commune ou même axe radical.

Traçons le cercle orthotomique O aux trois cercles donnés, ce cercle est aussi orthotomique aux trois nouveaux cercles. Leurs axes radicaux passent donc par son centre.

Le centre de P_1 se trouve à l'intersection de la droite C_2C_3 avec la corde $\gamma_2\gamma_3$ commune à C_1 et à O.



On trouve de même les centres de P_2 et de P_3. Il faut démontrer que ces trois points sont en ligne droite.

Projetons la figure de manière que la droite P_1P_2 passe à l'infini.

$\gamma_2\gamma_3$ deviendra parallèle à C_2C_3 et C_1O sera perpendiculaire à C_2C_3.

$\gamma_1\gamma_3$ deviendra parallèle à C_1C_3 et C_2O sera perpendiculaire à C_1C_3.

O deviendra l'intersection de deux hauteurs du nouveau triangle; donc la projection de C_3O sera aussi perpendiculaire à C_1C_2 et P_3 passera aussi à l'infini. Donc, etc.

Remarques.

1°. C_1, C_2, C_3, γ_1, γ_2, γ_3 forment deux triangles polaires réciproques. Les droites qui joignent les sommets opposés se coupent en un même point, pôle de la ligne P_1P_3 par rapport au cercle orthotomique O.

2°. Les points C_1, C_2, C_3, γ_1, γ_2, γ_3 sont sur une même conique, ce qui donne ce théorème : Les sommets de deux triangles polaires réciproques sont sur une même conique.

3°. Les côtés des deux triangles forment un hexagone circonscriptible à une conique.

On peut arriver à une solution aussi simple par l'analyse. Les trois axes radicaux de $P_1P_2P_3$ passent en O.

Soit $\varphi = 0$ l'équation homogène du cercle orthotomique O; soient $x_0y_0z_0$, $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$ les coordonnées des trois sommets du triangle $C_1C_2C_3$, et posons

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \Delta.$$

Les équations des lignes C_1C_2, C_1C_3, C_2C_3, $\gamma_1\gamma_2$,

$\gamma_1\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_3$ seront

$$\frac{d\varphi}{dx_0}x + \frac{d\varphi}{dy_0}y + \frac{d\varphi}{dz_0}z = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx_1}x + \frac{d\varphi}{dy_1}y + \frac{d\varphi}{dz_1}z = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx_2}x + \frac{d\varphi}{dy_2}y + \frac{d\varphi}{dz_2}z = 0,$$

et

$$\frac{d\Delta}{dx_0}x + \frac{d\Delta}{dy_0}y + \frac{d\Delta}{dz_0}z = 0,$$

$$\frac{d\Delta}{dx_1}x + \frac{d\Delta}{dy_1}y + \frac{d\Delta}{dz_1}z = 0,$$

$$\frac{d\Delta}{dx_2}x + \frac{d\Delta}{dy_2}y + \frac{d\Delta}{dz_2}z = 0.$$

Appelons $x'y'z'$, $x''y''z''$, $x'''y'''z'''$ les coordonnées des points P_1, P_2, P_3, et faisons

$$D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

La condition pour que les trois points P_1, P_2, P_3 soient en ligne droite

$$\frac{dD}{dx'''}\cdot\frac{dD}{dy'} - \frac{dD}{dx'}\frac{dD}{dy'''} = D\frac{d^2D}{dx'''\,dy'} = 0$$

ou

$$D = 0,$$

équation qui se vérifie, mais par des calculs un peu longs.
