PAINVIN

Application de la nouvelle analyse aux surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 457-461

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__457_1>

APPLICATION DE LA NOUVELLE ANALYSE AUX SURFACES DU SECOND ORDRE

(voir p 403),

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences.

25. Comme application des théorèmes qui précèdent, je vais donner les caractères auxquels on reconnaît qu'une

surface du second ordre est de révolution, en conservant aux axes une direction quelconque.

Soit

$$(1)\quad \varphi = \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 \\ \quad + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 \\ \quad + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 \end{array} \right\} = 0,$$

l'équation d'une surface du second ordre, et

$$(2)\quad F = \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + c_{44}x_4^2 + 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{13}x_1x_3 \\ \quad + 2c_{14}x_1x_4 + 2c_{23}x_2x_3 + 2c_{24}x_2x_4 \\ \quad + 2c_{34}x_3x_4 \end{array} \right\} = 0,$$

l'équation d'une sphère.

Nous avons posé

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} c_{12} = c_{21} = \cos(x_1, x_2); \\ c_{13} = c_{31} = \cos(x_1, x_3); \\ c_{23} = c_{32} = \cos(x_2, x_3); \\ c_{14} = c_{41} = m_1 + m_2c_{12} + m_3c_{13}; \\ c_{24} = c_{42} = m_1c_{21} + m_2 + m_3c_{23}; \\ c_{34} = c_{43} = m_1c_{31} + m_2c_{32} + m_3; \\ c_{44} = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + 2c_{12}m_1m_2 + 2c_{13}m_1m_3 \\ \qquad + 2c_{23}m_2m_3 - r^2; \end{array} \right.$$

dans ces formules, r désigne le rayon de la sphère, et $(-m_1, -m_2, -m_3)$ les coordonnées de son centre.

L'équation la plus générale des surfaces du second ordre, passant par l'intersection de la sphère et de la surface proposée, sera

$$(4)\qquad \varphi + \lambda F = 0.$$

Or la condition nécessaire et suffisante pour que la surface représentée par l'équation (1) soit de révolution, est que la surface (4) se réduise à deux plans parallèles ; car alors les intersections de la surface du second degré par la sphère variable (2) se composeront d'une série de cercles parallèles ; et le lieu des centres de ces sphères sera l'axe de révolution.

En appliquant à l'équation (4) les conditions énoncées au n° 24 pour que l'équation du second degré représente deux plans parallèles, on obtient les cinq relations suivantes :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12}+\lambda c_{12} \\ a_{21}+\lambda c_{21} & a_{22}+\lambda \end{vmatrix} = 0, \\
&\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{13}+\lambda c_{13} \\ a_{31}+\lambda c_{31} & a_{33}+\lambda \end{vmatrix} = 0, \\
&\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12}+\lambda c_{12} & a_{13}+\lambda c_{13} \\ a_{21}+\lambda c_{21} & a_{22}+\lambda & a_{23}+\lambda c_{23} \\ a_{31}+\lambda c_{31} & a_{32}+\lambda c_{32} & a_{33}+\lambda \end{vmatrix} = 0, \\
&\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12}+\lambda c_{12} & a_{14}+\lambda c_{14} \\ a_{21}+\lambda c_{21} & a_{22}+\lambda & a_{24}+\lambda c_{24} \\ a_{41}+\lambda c_{41} & a_{42}+\lambda c_{42} & a_{44}+\lambda c_{44} \end{vmatrix} = 0, \\
&\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{13}+\lambda c_{13} & a_{14}+\lambda c_{14} \\ a_{31}+\lambda c_{31} & a_{33}+\lambda & a_{34}+\lambda c_{34} \\ a_{41}+\lambda c_{41} & a_{43}+\lambda c_{43} & a_{44}+\lambda c_{44} \end{vmatrix} = 0.
\end{aligned}\right.$$

26. Les deux premières des équations (5) donnent

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &(a_{11}+\lambda)(a_{22}+\lambda) = (a_{12}+\lambda c_{12})^2, \\ &(a_{11}+\lambda)(a_{33}+\lambda) = (a_{13}+\lambda c_{13})^2. \end{aligned}\right.$$

Si l'on développe la troisième par rapport aux éléments de la troisième colonne, puis qu'on ait égard à la première des équations (5), et aux relations (6), il viendra

$$(a_{22}+\lambda)(a_{33}+\lambda) = (a_{23}+\lambda c_{23})^2.$$

Nous obtenons ainsi les trois relations définitives

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}(a_{11}+\lambda)(a_{22}+\lambda)&=(a_{12}+\lambda c_{12})^2,\\(a_{22}+\lambda)(a_{33}+\lambda)&=(a_{23}+\lambda c_{23})^2,\\(a_{33}+\lambda)(a_{11}+\lambda)&=(a_{31}+\lambda c_{31})^2;\end{aligned}\right.$$

qu'on pourra remplacer par les trois suivantes :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned}(a_{33}+\lambda)(a_{12}+\lambda c_{12})&=(a_{31}+\lambda c_{31})(a_{32}+\lambda c_{32}),\\(a_{11}+\lambda)(a_{23}+\lambda c_{23})&=(a_{12}+\lambda c_{12})(a_{13}+\lambda c_{13}),\\(a_{22}+\lambda)(a_{31}+\lambda c_{31})&=(a_{23}+\lambda c_{23})(a_{21}+\lambda c_{21}).\end{aligned}\right.$$

L'élimination de λ entre ces trois relations conduira aux *deux équations de condition* nécessaires et suffisantes pour que la surface représentée par l'équation (1) soit de révolution.

Ces équations d'ailleurs se présentent sous une forme assez compliquée, et il est préférable de conserver les relations primitives (7) ou (8).

En introduisant, dans les relations (8), l'hypothèse

$$c_{12}=c_{23}=c_{31}=0,$$

on retrouve les équations connues dans le cas des axes rectangulaires.

27. Développons maintenant les deux dernières équations (5). La quatrième donne

$$\left.\begin{aligned}&(a_{14}+\lambda c_{14})\begin{vmatrix}a_{21}+\lambda c_{21} & a_{22}+\lambda\\ a_{41}+\lambda c_{41} & a_{42}+\lambda c_{42}\end{vmatrix}\\ -&(a_{24}+\lambda c_{24})\begin{vmatrix}a_{11}+\lambda & a_{12}+\lambda c_{12}\\ a_{41}+\lambda c_{41} & a_{42}+\lambda c_{42}\end{vmatrix}\\ +&(a_{44}+\lambda c_{44})\begin{vmatrix}a_{11}+\lambda & a_{12}+\lambda c_{12}\\ a_{21}+\lambda c_{21} & a_{22}+\lambda\end{vmatrix}\end{aligned}\right\}=0.$$

Si l'on remarque que le dernier déterminant est nul, et qu'on ait égard aux relations (7) ou (8), il vient après réduction

$$(9)\qquad (a_{11}+\lambda)(a_{24}+\lambda c_{24})=(a_{12}+\lambda c_{12})(a_{14}+\lambda c_{14}).$$

On trouvera de même, en développant la dernière des équations (5),

$$(10)\qquad (a_{11}+\lambda)(a_{34}+\lambda c_{34})=(a_{13}+\lambda c_{13})(a_{14}+\lambda c_{14}).$$

Ces deux dernières relations peuvent s'écrire

$$(11)\qquad \frac{a_{14}+\lambda c_{14}}{a_{11}+\lambda}=\frac{a_{24}+\lambda c_{24}}{a_{12}+\lambda c_{12}}=\frac{a_{34}+\lambda c_{34}}{a_{13}+\lambda c_{13}}.$$

Or la sphère (2) a pour coordonnées de son centre $(-m_1, -m_2, -m_3)$; on obtiendra donc le lieu des centres, ou les équations de l'*axe de révolution*, en remplaçant, dans les équations (11), m_1, m_2, m_3 respectivement par $-\frac{x_1}{x_4}$, $-\frac{x_2}{x_4}$, $-\frac{x_3}{x_4}$; les c_{14}, c_{24}, c_{34} étant définis par les relations (3). On trouve ainsi

$$(12)\left\{\begin{aligned}\frac{\lambda(x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3)-a_{14}x_4}{a_{11}+\lambda}&=\frac{\lambda(c_{21}x_1+x_2+c_{23}x_3)-a_{24}x_4}{a_{12}+\lambda c_{12}}\\&=\frac{\lambda(c_{31}x_1+c_{32}x_2+x_3)-a_{34}x_4}{a_{13}+\lambda c_{13}};\end{aligned}\right.$$

la quantité λ est déterminée par les équations (7) ou (8).

La suite prochainement.