NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. STEINER

Théorèmes divers et problèmes sur les courbes planes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 443-446

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__443_1>

THEOREMES DIVERS ET PROBLÈMES SUR LES COURBES PLANES ;

DE M. J. STEINER (*).

1. *Notation.* Soient une courbe plane C^n de degré n et F un point fixe dans le plan de la courbe ; si un faisceau de droites passe par le point fixe F, chaque rayon du fais-

(*) *Bulletin mensuel de l'Académie de Berlin*, juillet 1858, p. 419-443 ceau coupe la courbe en n points. Pour un rayon quelconque, soit p le produit des distances des n points d'intersection au point F.

Théorème I. *Les rayons se partagent en général en groupes de* $2n$ *droites où dans chaque groupe les produits* p *sont égaux. Entre ces* $2n$ *droites, il y en a* n *où le produit* p *présente un* minimum *relatif. Ce minimum devient autant de fois un maximum que la courbe a de couples d'asymptotes imaginaires.*

2. Théorème II. *Si on prend sur chaque rayon un point* q *tel, que sa distance au point fixe* F *étant élevée à la puissance* n *soit égale au produit* p, *le lieu de ce point est une courbe* Q^{2n} *de degré* $2n$, *qui a* n *doubles asymptotes qui passent par le point* F; *ce faisceau d'asymptotes rencontre la courbe* C^n *en* $2n(n-1)$ *points; dans chacun de ces rayons asymptotes, le point* q *coïncide avec un des* $2n(n-1)$ *points d'intersection. Ainsi il passe par le point* F, $2n(n-1)$ *rayons tels, que pour chacun un certain segment est moyenne* géométrique *entre les* $n-1$ *autres segments. Le point* q *devant être porté de part et d'autre du point* F, *il s'ensuit que* F *est le centre de la courbe* Q^{2n} *et un point singulier multiple.*

3. Théorème III. *Dans les* n *droites où le produit* p *est un minimum relatif, la distance du point* q *au point* F *est aussi un minimum, de sorte que ces droites sont, au point* q, *normales à la courbe* Q^{2n}.

4. Applications aux coniques. En faisant $n=2$, les $2n$ droites du théorème I se réduisent dans l'ellipse à deux réelles, qui sont parallèles à deux diamètres égaux; les deux autres sont imaginaires; comme il y a un couple d'asymptotes imaginaires, il y a une droite qui est un maximum; c'est la parallèle à l'axe focal. Dans l'hyper-

bole, il y a quatre transversales parallèles aux quatre diamètres égaux; deux de ces diamètres appartiennent à l'hyperbole conjuguée.

5. THÉORÈME. IV. *Par un point fixe* F, *situé dans le plan d'une conique, on mène trois transversales quelconques; sur les trois cordes comme diamètres, on décrit des* cercles. *Le point* radical *de ces cercles est fixe.*

Si le point F est à l'infini, le théorème devient évident.

6. THÉORÈME V. *Une droite de longueur constante, qui se meut entre deux courbes planes d'ordre* p *et* q, *enveloppe une courbe de classe* 4 pq *et a à l'infini une tangente de contact* 2 pq.

7. THÉORÈME VI. *Une droite de longueur constante, qui se meut dans une courbe de degré* C^n, *de degré* n, *enveloppe une courbe de la classe* 2 n (n—1); *il y a* n (n—1), *cordes de direction donnée; l'enveloppe touche les* n *asymptotes de la courbe* C^n *à l'infini dans un contact de quatre points; les milieux des cordes parallèles sont sur une ligne de degré* n —1 (*).

8. Soit la courbe C^4; et l'enveloppe de la corde constante est de vingt-quatrième classe; cette enveloppe et la courbe C^4 ont $12.24 = 288$ tangentes en commun, parmi lesquelles sont les quatre asymptotes, qui comptent chacune pour quatre tangentes; de sorte qu'il reste $288 - 16 = 272$ tangentes communes. Soient S une de ces 272 tangentes, α le point de contact avec la courbe C^4, et β, γ les points d'intersection de cette tangente avec la courbe C^4. Si β et γ sont du même côté de α, alors $\beta\gamma$ est égale à la corde constante; si α est entre β et γ, c'est $\alpha\beta$ ou $\alpha\gamma$, qui

---

(*) Il serait commode d'adopter les expressions contact *biponctuel, triponctuel, quadriponctuel, etc.;* de même pour le *point multiple.* TM.

est égale à la courbe constante; dans ce dernier cas, les deux courbes se touchent en α, et S compte pour deux tangentes communes.

9. Soit la courbe C^3; l'enveloppe est de la douzième classe et a avec la courbe C^3, en commun $6 . 12 = 72$ tangentes, parmi lesquelles les trois asymptotes de la courbe C^3 comptent pour $3 . 4 = 12$ tangentes, de sorte qu'il reste $72 - 12 = 60$ tangentes non asymptotes. Soient S une de ces 60 tangentes, α le point de contact, et β le point d'intersection. Les deux courbes se touchent en α, et $\alpha\beta$ est égale à la corde de longueur constante; de sorte que chaque tangente compte pour deux; il n'y a donc que 30 tangentes communes distinctes et l'on obtient les théorèmes suivants :

10. Théorème VII. *Dans toute courbe de troisième degré, il y a 30 tangentes pour chacune desquelles la distance du point de contact au point d'intersection est de même longueur.*

Lorsque cette distance est nulle, on a les 30 points d'inflexion dont trois seulement sont visibles.

11. Théorème VIII. *Dans une courbe* C^3, *on ne peut mener que 60 transversales coupant la courbe en trois points* α, β, γ, *tellement que* $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ *soient de longueurs données.*

12. Théorème. IX. *Courbe* C^2; *l'enveloppe de la corde constante est de la quatrième classe; par un point fixe on ne peut mener que quatre cordes égales; les* quatre *milieux de ces cordes sont sur un même cercle, dont le centre est indépendant de la longueur de la corde, et si* C^2 *représente deux* droites, *l'enveloppe est une courbe parallèle à une* hypocycloïde.

La suite prochainement.