EUGÈNE ROUCHÉ

Note sur les deux théorèmes d'Apollonius relatifs aux diamètres conjugués des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 436-437

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__436_1>

NOTE SUR LES DEUX THÉORÈMES D'APOLLONIUS
Relatifs aux diamètres conjugués des coniques ;

PAR M. EUGÈNE ROUCHE,
Professeur

Soit l'équation polaire d'une ellipse

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\omega + b^2 \cos^2\omega},$$

le pôle est au centre et l'axe focal est l'axe polaire ; ρ est un demi-diamètre. Désignant par θ l'angle que fait ρ avec son *conjugué*, on a

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\rho}{\rho'}, \quad \rho' = \frac{d\rho}{d\theta},$$

$$(1) \qquad \frac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \frac{\rho'^2}{\rho^2},$$

on a

$$\rho^{-2} = \frac{\sin^2\omega}{b^2} + \frac{\cos^2\omega}{a^2},$$

d'où

$$(2)\qquad -\left(\rho^{-2}-\frac{1}{a^2}\right)=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\sin^2\omega,$$

$$(3)\qquad \rho^{-2}-\frac{1}{b^2}=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos^2\omega.$$

Le carré de la dérivée de l'équation (2) est

$$\frac{\rho'^2}{\rho^6}=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2\sin^2\omega\cos^2\omega=-\left(\rho^{-2}-\frac{1}{a^2}\right)\left(\rho^{-2}-\frac{1}{b^2}\right),$$

ou

$$\rho^4-\rho^2(a^2+b^2)+a^2b^2\left(1+\frac{\rho'^2}{\rho^2}\right)=0,$$

et d'après l'équation (1)

$$(4)\qquad \rho^4-\rho^2(a^2+b^2)+\frac{a^2b^2}{\sin^2\theta}=0.$$

Désignant par a'^2 et b'^2 les carrés des demi-diamètres conjugués qui font entre eux l'angle θ, on a donc, en vertu de cette équation,

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2,$$

$$a'b'=\frac{ab}{\sin\theta};$$

ce sont les deux théorèmes d'Apollonius.

La correspondance du maximum de θ à l'égalité des diamètres conjugués devient intuitive d'après l'équation (4), qui est d'ailleurs très-propre à fournir la limite de θ.