

EUGÈNE ROUCHÉ

**Note sur les deux théorèmes d'Apollonius
relatifs aux diamètres conjugués des coniques**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 17
(1858), p. 436-437

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__436_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1858, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LES DEUX THÉORÈMES D'APOLLONIUS

Relatifs aux diamètres conjugués des coniques ;

PAR M. EUGÈNE ROUCHE,
Professeur

Soit l'équation polaire d'une ellipse

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega},$$

le pôle est au centre et l'axe focal est l'axe polaire ; ρ est un demi-diamètre. Désignant par θ l'angle que fait ρ avec son *conjugué*, on a

$$\begin{aligned} \text{tang } \theta &= \frac{\rho}{\rho'}, & \rho' &= \frac{d\rho}{d\theta}, \\ (1) \quad \frac{1}{\sin^2 \theta} &= 1 + \frac{\rho'^2}{\rho^2}, & & \end{aligned}$$

on a

$$\rho'^2 = \frac{\sin^2 \omega}{b^2} + \frac{\cos^2 \omega}{a^2},$$

d'où

$$(2) \quad -\left(\rho^{-2} - \frac{1}{a^2}\right) = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) \sin^2 \omega,$$

$$(3) \quad \rho^{-2} - \frac{1}{b^2} = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) \cos^2 \omega.$$

Le carré de la dérivée de l'équation (2) est

$$\frac{\rho'^2}{\rho^6} = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega = -\left(\rho^{-2} - \frac{1}{a^2}\right) \left(\rho^{-2} - \frac{1}{b^2}\right),$$

ou

$$\rho^4 - \rho^2(a^2 + b^2) + a^2 b^2 \left(1 + \frac{\rho'^2}{\rho^2}\right) = 0,$$

et d'après l'équation (1)

$$(4) \quad \rho^4 - \rho^2(a^2 + b^2) + \frac{a^2 b^2}{\sin^2 \theta} = 0.$$

Désignant par a'^2 et b'^2 les carrés des demi-diamètres conjugués qui font entre eux l'angle θ , on a donc, en vertu de cette équation,

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2,$$

$$a' b' = \frac{ab}{\sin \theta};$$

ce sont les deux théorèmes d'Apollonius.

La correspondance du maximum de θ à l'égalité des diamètres conjugués devient intuitive d'après l'équation (4), qui est d'ailleurs très-propre à fournir la limite de θ .