DEWULF

Solution des questions 401 et 402

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 428-432

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__428_0>

SOLUTION DES QUESTIONS 401 ET 402

(voir t. XVI, p. 401);

PAR M. DEWULF.

Équation générale des développées en coordonnées linéaires (*voir* Note à la fin).

Soient

$$f(x,y)=0,$$

$$Y-y=\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dx}}(X-x),$$

les équations d'une courbe de degré n et de sa normale en un point (x,y).

Les coordonnées *linéaires* de la normale sont (*Nouvelles Annales*, t. VII, p. 10)

$$(2)\qquad q=\frac{\frac{df}{dx}}{y\frac{df}{dx}-x\frac{df}{dy}},\quad p=\frac{-\frac{df}{dy}}{y\frac{df}{dx}-x\frac{df}{dy}}.$$

Ces deux dernières équations donnent

$$(3)\qquad px+qy=1.$$

En éliminant x en y entre les équations (1), (2), (3), nous aurons une équation entre p et q, qui sera l'équation de la développée de la courbe (1) en coordonnées linéaires. D'après le théorème de Bezout, cette équation sera de degré n^2. Donc la développée d'une courbe de degré n est de la classe n^2 (*).

(*) L'ordre est $3n(n-1)$. TM.

Ceci démontre un théorème de Steiner énoncé t. **XIV**, p. 233.

Pour l'ellipse

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1,$$

les calculs précédemment indiqués donnent l'équation

$$\frac{A^2}{p^2}+\frac{B^2}{q^2}=C^4,$$

et pour l'hyperbole

$$\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}=1,$$

l'équation

$$\frac{A^2}{p^2}-\frac{B^2}{q^2}=C^4;$$

ici $C^2=A^2+B^2$.

Solution de la question 401.

Soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

l'équation de l'ellipse donnée. La droite dont on cherche l'enveloppe a pour coordonnées linéaires

$$p=\frac{1}{x},\quad q=\frac{1}{y}.$$

Eliminant x et y entre ces trois équations, nous aurons l'équation cherchée de l'enveloppe, c'est

$$\frac{1}{a^2p^2}+\frac{1}{b^2q^2}=1.$$

Cette équation représente évidemment le développement d'une ellipse dont les axes sont

$$A = b\frac{ab}{a^2 - b^2},$$

$$B = a\frac{ab}{a^2 - b^2}.$$

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation de l'hyperbole donnée, l'enveloppe cherchée aura pour équation

$$\frac{1}{a^2p^2} - \frac{1}{b^2q^2} = 1,$$

qui représente la développée d'une hyperbole dont les axes sont

$$A = \frac{ab}{a^2 + b^2}a\sqrt{-1}, \qquad B = \frac{ab}{a^2 + b^2}b.$$

On trouve avec la même facilité l'équation des coordonnées linéaires de la surface enveloppe de la question 402.

Une surface peut être représentée par le système de deux équations

$$(1) \qquad f(p, q, r) = 0, \quad \text{ou} \quad pX + qY + rZ = 1; \qquad (2)$$

p, q, r étant des coordonnées linéaires, l'équation (1) suffit seule à représenter une surface.

L'équation du plan dont on cherche l'enveloppe en coordonnées ordinaires est évidemment

$$\frac{X}{2x} + \frac{Y}{2y} + \frac{Z}{2z} = 1,$$

x, y, z étant les coordonnées du point qu'on projette sur les trois plans coordonnés. Nous avons donc

$$p = \frac{1}{2x}, \quad q = \frac{1}{2y}, \quad r = \frac{1}{2z}.$$

Si le point x, y, z appartient à l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

l'élimination de x, y, z entre les quatre dernières équations nous donnera l'équation de la surface enveloppe

$$\frac{1}{a^2 p^2} + \frac{1}{b^2 q^2} + \frac{1}{c^2 r^2} = 4.$$

Il est facile de passer au cas des hyperboloïdes.

MM. Sacchi (Joseph), de Milan, et Mendès, élève du lycée Saint-Louis, résolvent la question 401 directement. MM. Laquière (Marius) et Carenou, élèves du même lycée, font observer que si l'on projette chaque point d'une parabole sur l'axe et sur la tangente qui passe par le sommet, l'enveloppe de la droite qui réunit les deux projections est une parabole du second degré.

M. J.-Ch. Dupain, professeur, ramène le problème à une question de dioptrique.

Note du Rédacteur. Soient

$$(1) \qquad py + qx = 1$$

l'équation d'une droite;

$$f(p, q) = 0,$$

une relation donnée entre p et q: on trouve pour enveloppe de la droite (1), par le procédé connu,

$$\varphi(p, q) = 0,$$

où φ est une fonction connue; $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$ sont les *coordonnées linéaires* de la courbe enveloppe, dénomination introduite par M. Plücker, qui nomme coordonnées par *points* (punk-coordinaten), le système cartésien par *points*; il est évident qu'on peut passer d'un système à l'autre. Nous avons jugé nécessaire de rappeler ce qu'on lit *Nouvelles Annales*, t. VII, p. 10.