NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAINVIN

Application de la nouvelle analyse aux surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 403-427

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__403_1>

APPLICATION DE LA NOUVELLE ANALYSE AUX SURFACES DU SECOND ORDRE

(voir page 370);

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences.

§ II. — *Discussion.*

8. Soit l'équation générale des surfaces du second

ordre

$$(\mathrm{I})\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a_{44}x_4^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3 \\ \qquad +2a_{14}x_1x_4+2a_{23}x_2x_3+2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4 \end{array}\right\}=0$$

J'admets d'abord que cette équation renferme le carré d'une au moins des variables x_1, x_2, x_3, de x_1^2, par exemple, et qu'on ait rendu positif le coefficient a_{11} du carré restant; c'est cette lettre qu'on devra placer au sommet de gauche du descriminant Δ.

Puisque a_{11} n'est pas nul, on peut ordonner l'équation (I) par rapport à la variable x_1, et la mettre sous la forme suivante :

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4)^2+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)x_2^2 \\ \qquad +(a_{11}a_{33}-a_{13}^2)x_3^2+(a_{11}a_{44}-a_{14}^2)x_4^2 \\ \qquad +2(a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13})x_2x_3+2(a_{11}a_{24}-a_{12}a_{14})x_2x_4 \\ \qquad +2(a_{11}a_{34}-a_{13}a_{14})x_3x_4 \end{array}\right\}=0,$$

ou

$$(\mathrm{II})\left\{\begin{array}{l} X_1^2+p_{34}x_2^2+p_{24}x_3^2+p_{23}x_4^2-2r_{14}x_2x_3-2r_{13}x_2x_4 \\ \qquad -2r_{12}x_3x_4=0, \end{array}\right.$$

en ayant égard aux formules (4) et en posant

$$X_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4.$$

Les hypothèses distinctes qu'il faudra faire pour élucider complétement tous les cas possibles sont au nombre de quatre ; nous allons les parcourir successivement.

Première hypothèse.

Le déterminant p_{34} *ou* $\dfrac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ *est différent de zéro.*

9. On pourra alors continuer la décomposition en or-

donnant par rapport à la variable x_2, ce qui donnera

$$X_1^2 + p_{34} X_2^2 + \frac{p_{24} p_{34} - r_{14}^2}{p_{34}} x_3^2 - 2 \frac{p_{34} r_{12} + r_{13} r_{14}}{p_{34}} x_3 x_4 + \frac{p_{34} p_{23} - r_{13}^2}{p_{34}} x_4^2 = 0,$$

après avoir posé (*voir* les formules 4)

$$\frac{d^2 \Delta}{da_{33}\, da_{44}} X_2 = \frac{d^2 \Delta}{da_{33}\, da_{44}} x_2 - \frac{d^2 \Delta}{da_{23}\, da_{44}} x_3 - \frac{d^2 \Delta}{da_{24}\, da_{33}} x_4;$$

ou, en faisant usage des relations (7) et (9),

$$\text{(III)} \left\{ X_1^2 + p_{34} X_2^2 + \frac{a_{11} \delta_{44}}{p_{34}} x_3^2 - 2 \frac{a_{11} \delta_{34}}{p_{34}} x_3 x_4 + \frac{a_{11} \delta_{33}}{p_{34}} x_4^2 = 0. \right.$$

Le déterminant δ_{44} ou $\dfrac{d\Delta}{da_{44}}$ est un *invariant*; cette expression jouit de la propriété caractéristique de se reproduire, quelle que soit la transformation de coordonnées *uni-modulaire* que l'on fasse subir à l'équation (I).

10. Supposons que l'invariant $\dfrac{d\Delta}{da_{44}}$ soit différent de zéro; on pourra encore continuer la décomposition par rapport à la variable x_3, et l'on obtiendra

$$X_1^2 + p_{34} X_2^2 + \frac{a_{11} \delta_{44}}{p_{34}} X_3^2 + \frac{a_{11}}{p_{34}} \frac{\delta_{33} \delta_{44} - \delta_{34}^2}{\delta_{44}} x_4^2 = 0,$$

après avoir posé (*voir* les formules 2)

$$\frac{d\Delta}{da_{44}} X_3 = \frac{d\Delta}{da_{44}} x_3 - \frac{d\Delta}{da_{34}} x_4.$$

Si enfin l'on a égard à la première des relations (5), on sera conduit à la forme définitive

$$\text{(IV)} \quad X_1^2 + \frac{d^2 \Delta}{da_{33}\, da_{44}} X_2^2 + \frac{a_{11} \dfrac{d\Delta}{da_{44}}}{\dfrac{d^2 \Delta}{da_{33}\, da_{44}}} X_3^2 + \frac{a_{11} \Delta}{\dfrac{d\Delta}{da_{44}}} x_4^2 = 0.$$

On conclura donc, dans l'hypothèse actuelle, que lorsque l'*invariant* $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ *est différent de zéro, l'équation* (I) *représente des surfaces à centre unique* (théorème n° 2).

Les coordonnées du centre seront données par les équations

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0.$$

Pour discuter l'équation (IV) je distinguerai deux cas.

Premier cas. *L'invariant* $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ *et le déterminant* $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ *étant tous deux positifs*, on voit que l'équation (IV) appartient au *genre ellipsoïde*, et que

Si $\Delta < 0$, on a un ellipsoïde réel ;
Si $\Delta = 0$, on a un point ;
Si $\Delta > 0$, on a un ellipsoïde imaginaire.

Second cas. *L'invariant* $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ *étant différent de zéro et n'étant pas positif en même temps que le déterminant* $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$, l'équation (IV) appartient au *genre hyperboloïde*.

Avec $\Delta > 0$, on aura à considérer :

1°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad - \quad +;$$

2°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} > 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad + \quad - \quad -;$$

3°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} = 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad + \quad -;$$

on reconnaît dans ces différents cas l'hyperboloïde à une nappe.

Avec $\Delta < 0$, on aura à considérer :

1°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad - \quad -;$$

2°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} > 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad + \quad - \quad +;$$

3°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad + \quad +;$$

on reconnaît l'hyperboloïde à deux nappes.

Enfin, avec $\Delta = 0$, on aura à considérer

1°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad -;$$

2°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} > 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad + \quad - ;$$

3°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad + ;$$

on reconnaît le cône.

Donc, en résumé,

Si $\Delta < 0$, on a un hyperboloïde à deux nappes;

Si $\Delta = 0$, on a un cône;

Si $\Delta > 0$, on a un hyperboloïde à une nappe.

11. Supposons maintenant que l'invariant $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ soit nul.

Il faut remonter à l'équation (III), et y introduire l'hypothèse $\frac{d\Delta}{da_{44}} = \delta_{44} = 0$; elle devient alors

$$X_1^2 + p_{34} X_2^2 - 2\frac{a_{11}\,\delta_{34}}{p_{34}} x_3 x_4 + \frac{a_{11}\,\delta_{33}}{p_{34}} x_4^2 = 0.$$

On conclura donc, dans l'hypothèse actuelle, que lorsque *l'invariant* $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ *est nul, l'équation* (I) *représente des surfaces dénuées de centre ou possédant une infinité de centres* (n° 2).

Afin de discuter l'équation (V) observons que la première des relations (5) (§ Ier) donne, dans le cas actuel,

(1) $$\Delta p_{34} = -(\delta_{34})^2,$$

ce qui montre que Δ et p_{34} sont de signes contraires, et, en outre, que Δ et δ_{34} s'annulent en même temps, puisqu'on suppose p_{34} différent de zéro.

Je distinguerai encore deux cas.

Premier cas. *L'invariant* $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ *étant nul, et le discriminant* Δ *différent de zéro*, l'équation (V) appartient au *genre paraboloïde*; et si

$\Delta < 0$, c'est-à dire $p_{34} > 0$, on a un paraboloïde elliptique;

$\Delta > 0$, c'est-à-dire $p_{34} < 0$, on a un paraboloïde hyperbolique.

Second cas. *L'invariant* $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ *étant nul ainsi que le discriminant* Δ, l'équation (V) appartient au *genre cylindrique.*

On voit, en effet, par la relation (1), que si $\Delta = 0$, on aura $\delta_{34} = 0$, et réciproquement; l'équation (V) prendra donc la forme

$$\text{(VI)} \qquad X_1^2 + \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} X_2^2 + a_{11} \frac{\dfrac{d\Delta}{da_{33}}}{\dfrac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}} x_4^2 = 0,$$

et si

$$\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} > 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} > 0,$$

on aura un cylindre elliptique imaginaire;

$$\text{si} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} > 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} < 0,$$

on aura un cylindre elliptique;

$$\text{si} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} < 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} \gtrless 0,$$

on aura un cylindre hyperbolique;

$$\text{si } \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} > 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} = 0,$$

on aura deux plans imaginaires qui se coupent ou une droite ;

$$\text{si } \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} < 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} = 0,$$

on aura deux plans qui se coupent.

Seconde hypothèse.

Le déterminant p_{34} *ou* $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ *est nul, et le déterminant* p_{24} *ou* $\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}}$ *est différent de zéro.*

12. Dans cette hypothèse, il faut avoir recours à l'équation (II), qui devient alors :

$$X_1^2 + p_{24}x_3^2 + p_{23}x_4^2 - 2r_{14}x_2x_3 - 2r_{13}x_2x_4 - 2r_{12}x_3x_4 = 0.$$

Le coefficient p_{24} étant différent de zéro, on pourra ordonner par rapport à la variable x_3 et mettre l'équation sous cette forme

$$X_1^2 + p_{24}X_2^2 - \frac{r_{14}^2}{p_{24}}x_2^2 + \frac{p_{24}p_{23} - r_{12}^2}{p_{24}}x_4^2$$
$$- 2\frac{p_{24}r_{13} + r_{12}r_{14}}{p_{24}}x_2x_4 = 0,$$

après avoir posé (*voir* les formules 4)

$$\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}}X_2 = \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}}x_2 - \frac{d^2\Delta}{da_{23}\,da_{44}}x_3 - \frac{d^2\Delta}{da_{34}\,da_{22}}x_4;$$

et enfin, en ayant égard aux relations (7) et (9), et y introduisant l'hypothèse $p_{34} = 0$, on trouvera

$$\text{(VII)} \quad X_1^2 + p_{24}X_2^2 + \frac{a_{11}\delta_{44}}{p_{24}}x_2^2 - 2\frac{a_{11}\delta_{24}}{p_{24}}x_2x_4 + \frac{a_{11}\delta_{22}}{p_{24}}x_4^2 = 0.$$

13. Supposons que l'invariant δ_{44} soit différent de zéro; on pourra encore continuer la décomposition par rapport à la variable x_2, et on obtiendra

$$X_1^2 + p_{24} X_2^2 + \frac{a_{11}\,\delta_{44}}{p_{24}} X_3^2 + \frac{a_{11}}{p_{24}} \cdot \frac{\delta_{22}\,\delta_{44} - \delta_{24}^2}{\delta_{44}} x_4^2 = 0,$$

après avoir posé

$$\frac{d\Delta}{da_{44}} X_3 = \frac{d\Delta}{da_{44}} x_2 - \frac{d\Delta}{da_{24}} x_4;$$

ou enfin, en faisant intervenir la seconde des relations (5),

$$\text{(VIII)} \qquad X_1^2 + \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} X_2^2 + \frac{a_{11}\dfrac{d\Delta}{da_{44}}}{\dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}}} X_3^2 + \frac{a_{11}\,\Delta}{\dfrac{d\Delta}{da_{44}}} x_4^2 = 0.$$

Or on admet $\delta_{44} \gtrless 0$, et $p_{34} = 0$; la première des relations (7) donne

$$(2) \qquad \delta_{44}\, a_{11} = -(r_{14})^2;$$

d'où il résulte que $\dfrac{d\Delta}{da_{44}}$ est nécessairement négatif.

Avec $\Delta > 0$, on aura à considérer :

1°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} > 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad + \quad - \quad -;$$

2°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad + \quad -;$$

on reconnaît l'hyperboloïde à une nappe.

Avec $\Delta < 0$, on aura à considérer :

1°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} > 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad + \quad - \quad +;$$

2°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad + \quad +;$$

on reconnaît l'hyperboloïde à deux nappes.

Enfin avec $\Delta = 0$, on aura à considérer :

1°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} > 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad + \quad -;$$

2°. $$\frac{d\Delta}{da_{44}} < 0, \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad +;$$

on reconnaît le cône.

Cette analyse complète le résumé correspondant au second cas de la première hypothèse (10).

14. Supposons maintenant que l'invariant $\dfrac{d\Delta}{da_{44}}$ soit nul. Introduisant cette hypothèse dans l'équation (VII), il vient

$$\text{(IX)} \qquad X_1^2 + p_{24}X_2^2 - 2\frac{a_{11}\delta_{24}}{p_{24}}x_2x_4 + \frac{a_{11}\delta_{22}}{p_{24}}x_4^2 = 0.$$

Or la seconde des relations (5) donne, puisque $\delta_{44} = 0$,

$$(3) \qquad \Delta p_{24} = -(\delta_{24})^2,$$

ce qui montre que Δ et p_{24} sont de signes contraires, et, en outre, que Δ et δ_{24} s'annulent en même temps, puisqu'on suppose p_{24} différent de zéro.

Je distinguerai deux cas.

Premier cas. *Le discriminant Δ est différent de zéro.*

Alors δ_{24} est différent de zéro, et on voit que si

$\Delta < 0$, c'est à-dire $p_{24} > 0$, on a un paraboloïde elliptique;
$\Delta > 0$, c'est-à-dire $p_{24} < 0$, on a un paraboloïde hyperbolique.

Second cas. *Le discriminant Δ est nul.*

Alors $\delta_{24} = 0$, et réciproquement. Dans ce cas, l'équation (IX) se réduit à

$$(\text{X}) \qquad X_1^2 + \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} X_2^2 + \frac{a_{11}\dfrac{d\Delta}{da_{22}}}{\dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}}} X_4^2 = 0.$$

Or la triple hypothèse ($p_{34} = 0$, $\delta_{44} = 0$, $\delta_{24} = 0$), introduite dans la première et la seconde des relations (7), donne

$$(4) \qquad r_{14} = 0, \quad \text{et} \quad \delta_{33}\, a_{11} = -(r_{13})^2;$$

puis dans la seconde des relations (9)

$$r_{13}\, p_{24} = 0,$$

et, comme p_{24} est différent de zéro, on en conclut $r_{13} = 0$, et par suite

$$(5) \qquad \delta_{33} = 0.$$

La distinction des différentes espèces de surfaces ne peut donc plus se fonder sur la consideration des déterminants

$$\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} \quad \text{et} \quad \frac{d\Delta}{da_{33}},$$

qui sont nuls tous deux; il faut y substituer les déterminants

$$\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} \quad \text{et} \quad \frac{d\Delta}{da_{22}}.$$

L'équation (X) nous conduira aux conséquences suivantes :

Lorsque

$$\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} = 0, \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} \gtrless 0, \quad \frac{d\Delta}{da_{44}} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta = 0,$$

$$\text{si} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} > 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{22}} > 0,$$

on a un cylindre elliptique imaginaire;

$$\text{si} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} > 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{22}} < 0,$$

on a un cylindre elliptique;

$$\text{si} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} < 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{22}} \gtrless 0,$$

on a un cylindre hyperbolique;

$$\text{si} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} > 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{22}} = 0,$$

on a deux plans imaginaires qui se coupent;

$$\text{si} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} < 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{22}} = 0,$$

on a deux plans qui se coupent.

Cette étude complète les résultats établis dans la première hypothèse (11).

Troisième hypothèse.

Les deux déterminants $\dfrac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ *et* $\dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}}$ *sont nuls.*

15. L'équation (II), à laquelle il faut maintenant avoir recours, devient

$$X_1^2 + p_{23}\,x_4^2 - 2\,r_{14}\,x_2\,x_3 - 2\,r_{13}\,x_2\,x_4 - 2\,r_{12}\,x_3\,x_4 = 0.$$

Or cette dernière équation peut être soumise aux transformations suivantes :

$$X_1^2 - (r_{14}\,x_2 + r_{12}\,x_4)\left(2x_3 + 2\,\frac{r_{13}}{r_{14}}\,x_4\right) + \frac{r_{14}\,p_{23} + 2\,r_{12}\,r_{13}}{r_{14}}\,x_4^2 = 0\,;$$

ou, en posant

$$2\,X_2 = r_{14}\,x_2 + r_{12}\,x_4 + 2\,x_3 + 2\,\frac{r_{13}}{r_{14}}\,x_4\,;$$

$$2\,X_3 = r_{14}\,x_2 + r_{12}\,x_4 - 2\,x_3 - 2\,\frac{r_{13}}{r_{14}}\,x_4\,;$$

$$\text{(XI)}\qquad X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 + \frac{r_{14}\,p_{23} + 2\,r_{12}\,r_{13}}{r_{14}}\,x_4^2 = 0.$$

Or en y faisant $p_{34} = 0$, $p_{24} = 0$, les trois premières des relations (7) (§ I^er^) donnent

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta_{44}\,a_{11} &= -\,r_{14}^2\,;\\ \delta_{33}\,a_{11} &= -\,r_{13}^2\,;\\ \delta_{22}\,a_{11} &= -\,r_{12}^2\,;\end{aligned}\right.$$

mais la troisième du groupe (9), c'est-à-dire

$$\delta_{23}\,a_{11} = r_{13}\,r_{12} + r_{14}\,p_{23}$$

nous conduira à

$$\delta_{22}\,\delta_{33} - \delta_{23}^2 = -\,\frac{r_{14}^2\,p_{23}^2 + 2\,r_{12}\,r_{13}\,r_{14}\,p_{23}}{a_{11}^2}\,;$$

et comme (relations 5, § I^er^)

$$\Delta p_{23} = \delta_{22}\,\delta_{33} - \delta_{23}^2\,;$$

il en résulte

$$(7)\qquad \Delta = -\frac{r_{14}}{a_{11}^2}\left(r_{14}\,p_{23} + 2\,r_{12}\,r_{13}\right).$$

16. Si l'on suppose $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ différent de zéro, ce qui, en vertu de la relation

$$\delta_{44}\,a_{11} = -\,(r_{14})^2$$

exige que r_{14} ne soit pas nul, et montre, en même temps, que $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ est essentiellement négatif, l'équation (XI) peut s'écrire :

$$(\text{XII})\qquad X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 + a_{11}\,\frac{\Delta}{\frac{d\Delta}{da_{44}}}\,x_4^2 = 0\,;$$

par suite, si

$\Delta < 0$, on a un hyperboloïde à deux nappes;

$\Delta = 0$, on a un cône;

$\Delta > 0$, on a un hyperboloïde à une nappe.

17. Admettons, en second lieu, que l'invariant $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ soit nul.

Les trois hypothèses

$$p_{34} = 0,\quad p_{24} = 0,\quad \delta_{44} = 0,$$

donnent, d'après les relations (5) § I^er^,

$$(8)\qquad \delta_{34} = 0,\quad \delta_{24} = 0\,;$$

puis, d'après la première des relations (7) § I^er^,

$$(9)\qquad r_{14} = 0\,;$$

et enfin d'après la première des relations (10), § I^er,

$$(10) \qquad \Delta = 0$$

D'un autre côté l'équation (II) se réduit à

$$(\text{XIII}) \qquad X_1^2 - 2r_{13}x_2x_4 - 2r_{12}x_3x_4 + p_{23}x_4^2 = 0.$$

C'est un cylindre parabolique.

Ainsi, lorsque

$$\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} = 0, \qquad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} = 0, \qquad \frac{d\Delta}{da_{44}} = 0,$$

ce qui entraîne comme conséquence $\Delta = 0$, l'équation (I) *représente un cylindre parabolique.*

Ceci suppose que r_{13} et r_{12} ne sont pas nuls en même temps.

Si l'on avait $r_{13} = 0$ et $r_{12} = 0$, ce qui donnerait, d'après les relations (7) § I^er,

$$\delta_{33} = 0, \quad \delta_{22} = 0$$

et réciproquement, l'équation (XIII) deviendrait

$$(\text{XIV}) \qquad X_1^2 + p_{23}x_4^2 = 0,$$

et représenterait deux plans parallèles imaginaires, si

$$\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{33}} > 0;$$

deux plans parallèles, si

$$\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{33}} < 0;$$

deux plans qui se confondent, si

$$\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{33}} = 0.$$

Quatrième hypothèse.

L'équation (I) *ne renferme aucun des carrés* x_1^2, x_2^2, x^2.

18. Dans ce cas, il faut nécessairement admettre que l'équation proposée renferme au moins un des rectangles $x_1 x_2$, $x_1 x_3$, $x_2 x_3$. Nous conviendrons alors de placer au second rang de la première ligne du discriminant Δ le coefficient a_{12} du rectangle $x_1 x_2$ qu'on suppose exister dans l'équation.

Dans l'hypothèse où nous nous plaçons, l'équation (I) se présente sous la forme

$$(\mathrm{XV})\quad \begin{aligned} &2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 \\ &+ 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2 = 0. \end{aligned}$$

On arrivera encore à la décomposition en carrés, en suivant la méthode indiquée par M. Moutard. On prend les dérivées du premier membre $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ de l'équation ci-dessus par rapport aux variables x_1 et x_2, faisant partie du rectangle qui n'a pas disparu, ce qui donne

$$\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dx_1} = a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4;$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dx_2} = a_{12}x_1 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4;$$

puis on remarque que

$$\frac{1}{4}\frac{d\varphi}{dx_1}\frac{d\varphi}{dx_2} = \left\{\begin{aligned} &a_{12}^2x_1x_2 + a_{12}a_{13}x_1x_3 + a_{12}a_{14}x_1x_4 \\ &+ a_{12}a_{23}x_2x_3 + a_{12}a_{24}x_2x_4 \\ &+ a_{23}a_{14}x_3x_4 + a_{13}a_{24}x_3x_4 + a_{13}a_{23}x_3^2 \\ &+ a_{14}a_{24}x_4^2 \end{aligned}\right\};$$

à cette équation on ajoute l'équation (XV), après avoir multiplié ses deux membres par $\frac{a_{12}}{2}$, il vient

$$\frac{1}{4}\frac{d\varphi}{dx_1}\frac{d\varphi}{dx_2} - a_{13}a_{23}x_3^2 + (a_{12}a_{34} - a_{23}a_{14} - a_{13}a_{24})x_3x_4 + \frac{a_{12}a_{44} - 2a_{14}a_{24}}{2}x_4^2 = 0;$$

d'où l'on conclut, après avoir posé

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx_1} + \frac{d\varphi}{dx_2}\right), \\ X_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx_1} - \frac{d\varphi}{dx_2}\right), \end{aligned}\right.$$

$$\text{(XVI)}\quad X_1^2 - X_2^2 - 4a_{13}a_{23}x_3^2 + 4(a_{12}a_{34} - a_{23}a_{14} - a_{13}a_{24})x_3x_4 + 2(a_{12}a_{44} - 2a_{14}a_{24})x_4^2 = 0.$$

19. Supposons, en premier lieu, qu'aucun des coefficients a_{13}, a_{23} ne soit nul; on pourra alors former le carré par rapport à la variable x_3, et on trouvera

$$\text{(XVII)}\left\{\begin{aligned} &X_1^2 - X_2^2 - 4a_{13}a_{23}X_3^2 \\ &+ \frac{2a_{13}a_{23}(a_{12}a_{44} - 2a_{14}a_{24}) + (a_{12}a_{34} - a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24})^2}{a_{13}a_{23}}x_4^2 = 0, \end{aligned}\right.$$

en désignant par X_3 la fonction linéaire

$$x_3 - \frac{a_{12}a_{34} - a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24}}{2a_{13}a_{23}}x_4.$$

Or si, dans les formules (3) et (4) (§ Ier), on introduit les hypothèses particulières

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0,$$

il vient

$$(11)\quad\left\{\begin{aligned} p_{34} &= -a_{12}^2, \\ \delta_{44} &= 2a_{12}a_{13}a_{23}, \\ \delta_{33} &= -a_{12}(a_{12}a_{44} - 2a_{14}a_{24}), \\ \delta_{34} &= a_{12}(a_{12}a_{34} - a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24}). \end{aligned}\right.$$

La première de ces égalités nous montre que $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ est différent de zéro et négatif; les autres nous permettent d'écrire ainsi qu'il suit l'équation (XVII) :

$$X_1^2 - X_2^2 - 4a_{13}\,a_{23}\,X_3^2 + \frac{\delta_{34}^2 - \delta_{33}\,\delta_{44}}{a_{12}^2\,a_{13}\,a_{23}}\,x_4^2 = 0,$$

ou enfin, si l'on a égard à la première des relations (5), § I^er^,

$$\text{(XVIII)}\qquad X_1^2 - X_2^2 - 4a_{13}\,a_{23}\,X_3^2 + \frac{\Delta}{a_{13}\,a_{23}}\,x_4^2 = 0.$$

Or nous avons supposé que les coefficients a_{12}, a_{13}, a_{23} n'étaient pas nuls, ce qui exige, d'après la seconde des formules (11), que δ_{44} soit différent de zéro.

Discutons maintenant l'équation (XVIII).

Avec $\Delta > 0$, on aura à considérer :

1°. $$a_{13}\,a_{23} > 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad - \quad +;$$

2°. $$a_{13}\,a_{23} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad + \quad -;$$

on reconnaît l'hyperboloïde à une nappe.

Avec $\Delta < 0$, on aura à considérer :

1°. $$a_{13}\,a_{23} > 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad - \quad -;$$

2°. $$a_{13}\,a_{23} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+\quad-\quad+\quad+;$$

on reconnaît l'hyperboloïde à deux nappes.

Avec $\Delta = 0$, on aura à considérer :

1°. $$a_{13}\,a_{23} > 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+\quad-\quad-;$$

2° $$a_{13}\,a_{23} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+\quad-\quad+;$$

on reconnaît le cône.

20. Admettons, en second lieu, que l'un des coefficients a_{13}, a_{23}, ou tous deux ensemble, soient nuls ; on a, comme conséquence immédiate,

$$\delta_{44} = 0;$$

et, réciproquement, si $\delta_{44} = 0$, l'un ou l'autre des coefficients a_{13}, a_{23} sera nul.

Dans le cas actuel, l'équation (XVI) deviendra, si, par exemple, $a_{13} = 0$:

$$\text{(XIX)}\quad \left\{\begin{aligned} &X_1^2 - X_2^2 + 4(a_{12}\,a_{34} - a_{14}\,a_{23})\,x_3\,x_4 \\ &\qquad + 2(a_{12}\,a_{44} - 2a_{14}\,a_{24})\,x_4^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Or, d'après les relations précédentes (11), on a

$$\begin{aligned} p_{34} &= -a_{12}^2, \\ \delta_{44} &= 0, \\ \delta_{34} &= a_{12}(a_{34}\,a_{12} - a_{14}\,a_{23}); \end{aligned}$$

d'où

$$a_{12}^2 \Delta = (\delta_{34})^2.$$

On voit, d'après la valeur ci-dessus, que δ_{34} n'est pas nul, si l'on n'introduit pas d'autre hypothèse que celles que nous avons admises; et, par suite, il en est de même de Δ: on remarquera, en outre, que Δ est essentiellement positif.

L'équation (XIX) représentera alors un *paraboloïde hyperbolique;* conséquence qui se trouve incluse dans les conclusions du n° **11**.

Supposons enfin $\Delta = 0$; ce qui exige que δ_{34} soit nul, et réciproquement. L'équation (XIX) se réduit à

$$X_1^2 - X_2^2 + 2(a_{12}a_{44} - 2a_{14}a_{24})x_4^2 = 0,$$

ou, en ayant égard aux relations (11),

$$\text{(XX)} \qquad X_1^2 - X_2^2 - 2\frac{\delta_{33}}{a_{12}}x_4^2 = 0.$$

Or, dans ce cas,

$$\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} = -a_{12}^2 < 0;$$

on aura, par suite, à considérer

$$\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} < 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} \gtrless 0,$$

ce qui donne un cylindre hyperbolique;

$$\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} < 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} = 0,$$

ce qui donne deux plans qui se coupent.

21. Cette discussion détaillée nous montre que tous les genres et toutes les espèces, dans les surfaces du second ordre, se trouvent parfaitement caractérisés dans les tableaux suivants, qui en présenteront le résumé sous plusieurs points de vue.

Résumés.

1°. — INVARIANT $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ DIFFÉRENT DE ZÉRO.

1re FAMILLE. — Surfaces à centre unique.

Ier CAS. — *L'invariant* $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ *et le déterminant* $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ *tous deux positifs ;* genre *ellipsoïde.*

Discriminant Δ	négatif...	Ellipsoïde réel.
	nul......	Point.
	positif...	Ellipsoïde imaginaire.

N. B. Le déterminant $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ ne peut pas être nul dans ce cas

IIe CAS. — *L'invariant* $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ *étant différent de zéro et n'étant pas positif en même temps que le déterminant* $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$; genre *hyperboloïde.*

Discriminant Δ	négatif...	Hyperboloïde à deux nappes.
	nul.....	Cône.
	positif...	Hyperboloïde à une nappe.

N. B. Le déterminant $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ peut être quelconque, positif, négatif, ou nul.

2°. — INVARIANT $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ NUL.

2ᵉ FAMILLE. — Surfaces dénuées de centre ou possédant une infinité de centres.

Iᵉʳ CAS. — *L'invariant* $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ *étant nul et le discriminant* Δ *différent de zéro ;* genre *paraboloïde.*

$$\text{Discriminant } \Delta \left\{ \begin{array}{ll} \text{négatif}\ldots & \text{Paraboloïde elliptique.} \\ \text{positif}\ldots & \text{Paraboloïde hyperbolique.} \end{array} \right.$$

N. B. Le déterminant $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ peut être quelconque, positif, négatif, ou nul ; seulement, il ne peut pas être nul en même temps que $\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}}$, car il en résulterait $\Delta = 0$.

IIᵉ CAS. — *L'invariant* $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ *et le discriminant* Δ *étant nuls ;* genre *cylindrique.*

1°. *Les deux déterminants* $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ *et* $\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}}$ *n'étant pas nuls en même temps :*

Si
$$\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} \gtrless 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} > 0, & \frac{d\Delta}{da_{33}} > 0, & \text{cylindre elliptique imaginaire;} \\ \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} > 0, & \frac{d\Delta}{da_{33}} < 0, & \text{cylindre elliptique ;} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} < 0, \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} \gtrless 0, \quad \text{cylindre hyperbolique ;} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} > 0, & \frac{d\Delta}{da_{33}} = 0, & \text{deux plans imaginaires qui se coupent ou une droite;} \\ \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} < 0, & \frac{d\Delta}{da_{33}} = 0, & \text{deux plans qui se coupent.} \end{array} \right.$$

Si $\dfrac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} = 0$ et $\dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} \gtrless 0$,

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} > 0, & \dfrac{d\Delta}{da_{22}} > 0, & \text{cylindre elliptique imaginaire ;} \\ \dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} > 0, & \dfrac{d\Delta}{da_{22}} < 0, & \text{cylindre elliptique ;} \end{array}\right.$$

$$\left\{ \dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} < 0, \quad \dfrac{d\Delta}{da_{22}} \gtrless 0, \quad \text{cylindre hyperbolique ;} \right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} > 0, & \dfrac{d\Delta}{da_{22}} = 0, & \text{deux plans imaginaires qui se coupent ou } \textit{une droite ;} \\ \dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} < 0, & \dfrac{d\Delta}{da_{22}} = 0, & \text{deux plans qui se coupent.} \end{array}\right.$$

II°. *Les deux déterminants* $\dfrac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ et $\dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}}$ *étant nuls en même temps :*

1°. Si $\dfrac{d\Delta}{da_{33}}$ et $\dfrac{d\Delta}{da_{22}}$ ne sont pas nuls à la fois, on a un cylindre parabolique ;

2°. Si $\dfrac{d\Delta}{da_{33}} = 0$ et $\dfrac{d\Delta}{da_{22}} = 0$,

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{33}} > 0, & \text{on a deux plans parallèles imaginaires;} \\ \dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{33}} < 0, & \text{on a deux plans parallèles;} \\ \dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{33}} = 0, & \text{on a deux plans qui se confondent.} \end{array}\right.$$

N. B. Les hypothèses $\dfrac{d\Delta}{da_{44}} = 0$, $\dfrac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} = 0$, $\dfrac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} = 0$ entraînent, comme conséquence, $\Delta = 0$; mais il n'y a pas réciprocité.

22. On pourra résumer ainsi les signes caractéristiques des différents genres de surfaces :

Genre ellipsoïde. L'invariant $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ et le déterminant $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ sont tous deux positifs; $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ n'est jamais nul.

Genre hyperboloïde. L'invariant $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ est différent de zéro et n'est pas positif en même temps que le déterminant $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$, qui d'ailleurs peut être nul.

Genre paraboloïde. L'invariant $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ est nul, et le discriminant Δ est différent de zéro; $\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}}$ peut être nul.

Genre cylindrique. L'invariant $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ et le discriminant Δ sont tous deux nuls.

23. On peut encore dire, si l'on convient de regarder l'ellipsoïde imaginaire, comme une surface réglée :

Discriminant négatif. Surfaces réelles dénuées de génératrices rectilignes.

Discriminant positif. Surfaces réglées gauches.

Discriminant nul. Surfaces réglées développables

24. Nous achèverons cette discussion en énonçant les conditions déterminantes des surfaces particulières du second degré.

Pour que l'équation générale du second degré représente :

Un cône, il faut et il suffit que

$$\Delta = 0;$$

un paraboloïde, il faut et il suffit que

$$\frac{d\Delta}{da_{44}} = 0, \quad \text{et} \quad \Delta \gtrless 0;$$

un cylindre elliptique ou hyperbolique, il faut et il suffit que

$$\frac{d\Delta}{da_{44}} = 0, \quad \Delta = 0;$$

un cylindre parabolique, il faut et il suffit que

$$\frac{d\Delta}{da_{44}} = 0, \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} = 0, \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} = 0;$$

deux plans qui se coupent, il faut et il suffit que

$$\frac{d\Delta}{da_{44}} = 0, \quad \Delta = 0 \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{d\Delta}{da_{33}} = 0, & \text{si} \quad \dfrac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} \gtrless 0, \\ \dfrac{d\Delta}{da_{22}} = 0, & \text{si} \quad \dfrac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} = 0; \end{array} \right.$$

deux plans parallèles, il faut et il suffit que

$$\frac{d\Delta}{da_{44}} = 0, \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} = 0, \quad \frac{d\Delta}{da_{22}} = 0,$$

$$\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} = 0, \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} = 0.$$

Note. Le théorème sur des normales inséré (t. XVI, p. 464) est consigné dans un Mémoire de M. Liouville et inséré dans son journal (t. VI, p. 403). (Dewulf.)