

CHANSON

Solution de la question 316

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 17
(1858), p. 396-399

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__396_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1858, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 316

(voir t. XV, p. 82).

PAR M. CHANSON,

Élève du lycée de Versailles (classe de M. Vannson).

Etant donnée la progression arithmétique

$$a, a + r, a + 2r, \dots, a + nr$$

dans laquelle a et r sont premiers entre eux, faire voir qu'on peut y trouver un nombre illimité de termes premiers avec un nombre donné quelconque A .

Cela revient à dire qu'on peut choisir n d'une infinité de manières de sorte que $a + nr$ soit premier avec A .

Pour cela, je distingue trois cas :

1^o. Celui où A est premier à la fois avec a et r .

Soit

$$A = b^{b'} c^{c'} d^{d'};$$

je n'ai qu'à poser

$$n = b^r c^s d^u,$$

γ, z, u pouvant d'ailleurs varier d'une infinité de manières. Je dis que A sera premier avec $a + nr$; car si un facteur premier de A divisait la somme $a + nr$ comme il divise une de ses parties nr (car n renferme par hypothèse tous les facteurs premiers de A), il diviserait l'autre partie a , ce qui est contre l'hypothèse, n étant premier avec a .

2°. A est premier avec un des nombres a et r seulement, avec a par exemple.

Soient

$$r = \alpha^{\alpha'} \beta^{\beta'}, \dots, \quad A = \alpha^{\alpha''} \beta^{\beta''} \dots b^{b'} c^{c'} d^{d'}, \dots;$$

je n'ai qu'à prendre

$$n = b^r c^s d^u,$$

c'est-à-dire égal au produit de tous les facteurs premiers de A qui n'entrent pas dans r avec des exposants quelconques. Il est clair alors que A sera premier avec $a + nr$; car si α ou un facteur analogue (c'est-à-dire un des facteurs qui entrent dans r) divisait $a + nr$ divisant nr , il devrait diviser a , ce qui est contre l'hypothèse, parce que a est supposé premier avec r . Si c'était un des facteurs b, c qui n'entrent pas dans r qui divisât $a + nr$, on arriverait à la même absurdité.

Si A était premier avec r seulement, on raisonnerait de la même façon.

Passant donc au troisième cas, c'est-à-dire à celui où A n'est premier ni avec a ni avec r , alors si

$$r = \alpha^{\alpha'} \beta^{\beta'}, \dots, \quad a = \gamma^{\gamma'} \delta^{\delta'}, \dots, \quad \text{et} \quad A = \alpha^p \dots \gamma^q \dots b^{b'} c^{c'} \dots,$$

je choisis

$$n = b^r c^s \dots,$$

γ, z pouvant être quelconques. Je démontrerai comme

précédemment qu'aucun facteur de A ne peut diviser $a + nr$; car n ayant été choisi de la manière indiquée, ce facteur diviserait une des parties de la somme, et, par suite, diviserait l'autre, ce qui conduirait à une absurdité.

Note du Rédacteur. Dans les cas deuxième et troisième, quand A n'aura pas d'autres facteurs premiers que ceux qui entrent dans a et r , on aura $n = 1$, mais quand $a + \alpha r$ est premier à A , $a + (\alpha + kA)r$ l'est également; il y a donc encore dans $a + nr$ une infinité de nombres premiers à A .

L'avantage de la démonstration précédente est de ne pas supposer la résolution de l'équation indéterminée du premier degré à deux inconnues. Jacobi, dans l'introduction de son *Canon arithmeticus*, indique une démonstration qui suppose cette résolution, et qui peut donner l'expression générale des valeurs de n qui rendent $a + nr$ premier au nombre A .

On y lit :

« *Observo si A et B inter se primi sint, semper effici posse addendo ipsi A multiplum ipsius B ut prodeat numerus ad alium quemlibet C primus. Sit enim B' factor maximus ipsius C ad B primus sive $\frac{C}{B'}$ factor maximus communis ipsorum B et C ideoque primus ad numeros A, $A + \alpha B$; erit $A + \alpha B$ ad C primus, si ad B' primus est; sub forma autem $A + \alpha B$ pro diversis ipsius α valoribus continentur numeri, qui respectu moduli B' ad B primi residua quæcunque placet relinquunt; inde etiam forma $A + \alpha B$ continet numeros ad B' primos, q. d. e.*

Il y a ici omission ou erreur de copie.

Soient

$$\begin{aligned} B &= a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots \times p^\lambda q^\mu \dots, \\ C &= a'^{\alpha'} b'^{\beta'} c'^{\gamma'} \dots \times r^\rho s^\sigma \dots, \end{aligned}$$

$a, b, c, \dots, p, q, \dots, r, s$ étant premiers, on aura

$$B' = r^{\rho} s^{\sigma} \dots, \quad \frac{C}{B'} = a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\delta'} \dots,$$

qui n'est pas le plus grand commun diviseur de C et B, mais bien un multiple de ce plus grand commun diviseur.