P. DE VIRIEU

Solutions des questions 440 et 442

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 393-394

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__393_0>

SOLUTIONS DES QUESTIONS 440 ET 442

(voir page 296),

PAR M. P. DE VIRIEU,
Régent à Saumur.

Les deux identités proposées peuvent se déduire d'une même formule qui peut servir à en trouver une infinité d'autres.

Soient x une variable positive entière qui peut être nulle; P_x une fonction déterminée de cette variable; i, n des nombres entiers positifs; en ajoutant membre à membre les n identités suivantes :

$$\frac{1}{P_x} - \frac{1}{P_{x+1}} = \frac{P_{x+1} - P_x}{P_x P_{x+1}},$$

$$\frac{1}{P_{x+i}} - \frac{1}{P_{x+i+1}} = \frac{P_{x+i+1} - P_{x+i}}{P_{x+i} P_{x+i+1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{P_{x+n-1}} - \frac{1}{P_{x+n}} = \frac{P_{x+n} - P_{x+n-1}}{P_{x+n-1} P_{x+n}},$$

on a l'identité

$$\text{(A)} \qquad \frac{P_{x+n} - P_x}{P_x P_{x+n}} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{P_{x+i} - P_{x+i-1}}{P_{x+i-1} P_{x+i}};$$

en posant successivement

$$P_x = a_0 + a_1 + \ldots + a_x,$$

$$P_x = \operatorname{tang}(a_0 + a_1 + \ldots + a_x),$$

$$P_x = \cot(a_0 + a_1 + \ldots + a_x),$$

$$P_x = \log(a_0 + a_1 + \ldots + a_x),$$

on a

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{a_{x+1}+\ldots+a_{x+n}}{(a_0+\ldots+a_x)(a_0+\ldots+a_{x+n})}\\
&=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{a_{x+i}}{(a_0+\ldots+a_{x+i-1})(a_0+\ldots+a_{x+i})},
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\sin(a_{x+1}+\ldots+a_{x+n})}{\sin(a_0+\ldots+a_x)\sin(a_0+\ldots+a_{x+n})}\\
&=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\sin a_{x+i}}{\sin(a_0+\ldots+a_{x+i-1})\sin(a_0+\ldots+a_{x+i})},
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\sin(a_{x+1}+\ldots+a_{x+n})}{\cos(a_0+\ldots+a_x)\cos(a_0+\ldots+a_{x+n})}\\
&=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\sin a_{x+i}}{\cos(a_0+\ldots+a_{x+i-1})\cos(a_0+\ldots+a_{x+i})},
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\log\left(\dfrac{a_0+\ldots+a_{x+n}}{a_0+\ldots+a_x}\right)}{\log(a_0+\ldots+a_x)\log(a_0+\ldots+a_{x+n})}\\
&=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\log\left(\dfrac{a_0+\ldots+a_{x+i}}{a_0+\ldots+a_{x+i-1}}\right)}{\log(a_0+\ldots+a_{x+i-1})\log(a_0+\ldots+a_{x+i})};
\end{aligned}
\right.
$$

en posant $x=0$ dans (1) et (2), on a les identités proposées dans les questions **440**, **442**.

L'énoncé de la question **440** renferme une faute d'impression ; le premier facteur du dénominateur doit être a_0, et non a_n dans le premier membre.

Note. M. Delestrée, élève au lycée Saint-Louis, a donné une bonne solution particulière de la question **442**, ainsi que M. G. Andanson, candidat à la Licence, à Lyon.