

Questions

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 17
(1858), p. 358-360

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__358_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1858, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS.

446. Joignons par une droite les centres des cercles inscrit et circonscrit à un triangle; cette droite rencontre le cercle inscrit en deux points; soient s et s' les puissances de ces points relativement au cercle circonscrit, r le rayon du cercle inscrit, R le rayon du cercle circonscrit, on a la relation

$$ss' = r^2 (4R + r).$$

Note. La puissance d'un point par rapport à un cercle est le produit des segments de la sécante ou de la corde menée par ce point; expression introduite par Steiner, le célèbre géomètre, Euclide moderne de l'Allemagne (*).

447. Soient

$$\begin{aligned}
 x_1 &= p^{\frac{1}{2}}, \\
 x_2 &= (p + \sqrt{p^2 + qx_1})^{\frac{1}{2}}, \\
 x_3 &= (p + \sqrt{p^2 + qx_2})^{\frac{1}{2}}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_n &= (p + \sqrt{p^2 + qx_{n-1}})^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

(*) La Prusse possède de grands géomètres qu'elle rémunère peu. Jacobi voulait échanger Berlin contre Vienne; Dirichlet a fait cet échange contre Göttingue, et Steiner contre la Suisse, son pays natal.

p et q sont supérieurs à zéro; démontrer que :

1°. Les termes $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ vont en croissant;

2°. $x_n^2 + x_{n-1}^2 - 2p$ est une quantité positive;

3°. $x_1 x_2 x_3 \dots x_{n-2}$ n'est pas inférieure à $\frac{1}{\sqrt{e}} (2p)^{\frac{n-2}{2}}$;

4°. $x^n - x^{n-1} < \frac{1}{2^{2n-2} \frac{1}{4}} \left(\frac{p^2 + q\sqrt{p}}{2p} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{q^2}{8p^3} \right)^{\frac{n-2}{4}}$.

(GRUNERT.)

448. Soient A et B les extrémités du grand axe $2a$ d'une ellipse, C le centre; O un point fixe dans le plan de l'ellipse, et $OC = d$; inscrivons dans l'ellipse un polygone de $2n$ côtés, projection d'un polygone régulier inscrit dans le cercle dont l'ellipse est la projection orthogonale; A et B étant deux sommets opposés, menons du point O des rayons successifs $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{2n}$, et par le centre des demi-diamètres R_1, R_2, \dots, R_{2n} respectivement parallèles à ces rayons, on a les deux relations

$$\frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_3}{R_3} \cdot \frac{r_5}{R_5} \cdot \frac{r_{2n-1}}{R_{2n-1}} = \pm \left(1 + \frac{d}{a} \right)^n,$$

$$\frac{r_2}{R_2} \cdot \frac{r_4}{R_4} \cdot \frac{r_6}{R_6} \cdot \frac{r_{2n}}{R_{2n}} = \pm \left(1 - \frac{d}{a} \right)^n,$$

le signe supérieur lorsque le point O est dans l'intérieur, et le signe inférieur lorsque le point est extérieur.

449. Soit l'équation

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0,$$

s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 la somme des puissances 0, 1, 2, 3, 4 des racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$,

Si l'on a l'une ou l'autre de ces deux relations

$$ar^2 - 4bd + 3c^2 = 0,$$

et

$$\begin{vmatrix} s_0, s_1, s_2 \\ s_1, s_2, s_3 \\ s_2, s_3, s_4 \end{vmatrix} = 0,$$

alors

$$\sum \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} = 0.$$

(MICHAEL STREBOR.)

450. Une droite est donnée par ses deux projections qui se rencontrent en un même point de la ligne de terre ; mener par la droite un plan tel, que ses deux traces, étant relevées, forment un angle bissecté par la droite donnée. (Solution graphique.)

451. Une hyperbole équilatère homofocale à une ellipse intercepte sur les côtés d'un angle droit circonscrit à l'ellipse deux cordes égales. (MANNHEIM.)
