GERONO

Questions d'examen (École polytechnique) (suite)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 341-347

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__341_1>

QUESTIONS D'EXAMEN (ÉCOLE POLYTECHNIQUE). (Suite.)

Voir p 314 .

2. *Trouver les conditions qui doivent être remplies par les coefficients de l'équation générale du second degré à trois variables*

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2\,byz + 2\,b'xz + 2\,b''xy \\ \quad + 2\,cx + 2\,c'y + 2\,c''z + d = 0, \end{array} \right.$$

pour que cette équation représente le système de deux plans parallèles.

On sait que dans ce cas les trois équations dérivées

$f'(x)=0$, $f'(y)=0$, $f'(z)=0$, doivent représenter trois plans qui coïncident. En exprimant que les coefficients de différents termes de ces équations sont proportionnels, on trouve, par un calcul très-simple, les cinq conditions suivantes :

$$(2)\qquad a=\frac{b'b''}{b},\quad a'=\frac{bb''}{b'},\quad a''=\frac{bb'}{b''},\quad c''=\frac{bc}{b''},\quad c'=\frac{bc}{b'}.$$

3. *Lorsque l'équation générale du second degré représente deux plans parallèles, la fonction*

$$ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'xz+2b''xy,$$

formée des termes du second degré, est, à un facteur près, le carré du polynôme $2cx+2c'y+2c''z$ *qui contient tous les termes du premier degré de cette équation.*

Il en doit être ainsi, car deux plans parallèles pouvant toujours être représentés par

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \text{et} \quad Ax+By+Cz+D'=0,$$

l'équation (1) aura nécessairement la forme

$$(Ax+By+Cz+D)(Ax+By+Cz+D')=0,$$

ou

$$(Ax+By+Cz)^2+(D+D')(Ax+By+Cz)+DD'=0.$$

On peut aussi conclure cette remarque des relations (2) et trouver les équations de chacun des deux plans.

En effet, si l'on remplace a, a', a'' par leurs valeurs $\frac{b'b''}{b}$, $\frac{bb''}{b'}$, $\frac{bb'}{b''}$ dans la fonction

$$ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'xz+2b''xy,$$

elle devient

$$bb'b''\left(\frac{x}{b}+\frac{y}{b'}+\frac{z}{b''}\right)^2.$$

Et, en substituant à c'' et c' les expressions $\frac{bc}{b''}$, $\frac{bc}{b'}$, on a

$$2cx+2c'y+2c''z=2bc\left(\frac{x}{b}+\frac{y}{b'}+\frac{z}{b''}\right).$$

Donc,

$$ax^2+a'y^2+a''z^2+2b'xz+2b''xy$$
$$=(2cx+2c'y+2c''z)^2\times\frac{b'b''}{4bc^2}.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

En posant

$$2cx+2c'y+2c''z=\mathrm{X},$$

l'équation (1) se réduit à

$$\frac{b'b''}{4bc^2}\cdot\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+d=0,$$

ce qui revient à

$$\frac{a}{4c^2}\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+d=0,$$

puisque

$$\frac{b'b''}{b}=a.$$

De cette dernière équation on tire

$$\mathrm{X}=-\frac{2c^2}{a}\pm\frac{2c}{a}\sqrt{c^2-ad}.$$

D'où

$$\frac{a}{c}\mathrm{X}+2c=\pm 2\sqrt{c^2-ad}.$$

Mais

$$\frac{a}{c}X = \frac{a}{c}(2cx + 2c'y + 2c''z) = 2ax + \frac{2ac'}{c}y + \frac{2ac''}{c}z.$$

D'ailleurs, on a [d'après les relations (2)],

$$\frac{2ac'}{c} = 2b'', \quad \frac{2ac''}{c} = 2b';$$

il en résulte

$$\frac{a}{c}X = 2ax + 2b''y + 2b'z,$$

et

$$\frac{a}{c}X + 2c = 2ax + 2b''y + 2b'z + 2c = f'(x).$$

Par conséquent, les équations des deux plans parallèles sont

$$f'(x) = \pm 2\sqrt{c^2 - ad}.$$

Si

$$c^2 - ad = 0,$$

ces deux plans se réduisent à un seul, et lorsqu'on a

$$c^2 - ad < 0,$$

ils deviennent imaginaires.

4. *Déterminer les conditions nécessaires pour que l'équation générale du second degré à trois variables représente une surface de révolution, rapportée à des coordonnées rectangulaires.*

Soient

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

l'équation de la surface considérée, et

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 - r^2 = 0, \tag{2}$$

celle d'une sphère ayant pour centre un point (x', y', z') de l'axe de révolution. En disposant convenablement du rayon et du centre de la sphère, l'intersection des surfaces (1) et (2) sera formée de deux circonférences *réelles*, situées dans des plans perpendiculaires à l'axe de révolution, et dont les centres appartiendront à cette droite.

Toutes les surfaces du second degré qui contiendront ces deux circonférences, seront représentées par l'équation

$$(3)\quad f(x,y,z)+\lambda\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-r^2\right]=0,$$

dans laquelle λ est un coefficient arbitraire.

Or, le système des deux plans parallèles où se trouvent les deux circonférences est une surface du second degré qui contient ces deux courbes; donc il doit être possible d'attribuer à λ, x', y', z' des valeurs telles, que l'équation (3) représente le système de deux plans parallèles; il faut, par conséquent, qu'il existe pour λ, x', y', z' des valeurs qui rendent identiques les équations dérivées de l'équation

$$(3)\quad f(x,y,z)+\lambda\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-r^2\right]=0.$$

En remplaçant $f(x, y, z)$ par

$$ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'xz+2b''xy$$
$$+2cx+2c'y+2c''z+d,$$

les équations dérivées de (3) deviennent

$$(4)\qquad ax+b''y+b'z+c+\lambda(x-x')=0,$$

$$(5)\qquad b''x+a'y+bz+c'+\lambda(y-y')=0,$$

$$(6)\qquad b'x+by+a''z+c''+\lambda(z-z')=0.$$

Pour qu'elles admettent les mêmes solutions, il faut qu'on ait

$$(7)\qquad \frac{a+\lambda}{b''}=\frac{b''}{a'+\lambda}=\frac{b'}{b},$$

$$(8)\qquad \frac{a+\lambda}{b'}=\frac{b''}{b}=\frac{b'}{a''+\lambda},$$

$$(9)\qquad \frac{a+\lambda}{c-\lambda x'}=\frac{b''}{c'-\lambda y'}=\frac{b'}{c''-\lambda z'}.$$

Les relations (7) et (8) donnent

$$a+\lambda=\frac{b'b''}{b},\quad a'+\lambda=\frac{bb''}{b'},\quad a''+\lambda=\frac{bb'}{b''};$$

d'où

$$\lambda=\frac{b'b''}{b}-a=\frac{bb''}{b'}-a'=\frac{bb'}{b''}-a''.$$

Ainsi, les coefficients de l'équation générale du second degré devront satisfaire aux deux conditions

$$\frac{b'b''}{b}-a=\frac{bb''}{b'}-a'=\frac{bb'}{b''}-a'',$$

pour que cette équation représente une surface de révolution.

Quand ces deux conditions seront remplies, en prenant pour la valeur de λ l'une quelconque des trois différences

$$\frac{b'b''}{b}-a,\quad \frac{bb''}{b'}-a',\quad \frac{bb'}{b''}-a'',$$

les équations (7) et (8) seront vérifiées. Quant aux équations (9), qui contiennent les trois inconnues x', y', z', elles admettent une infinité de solutions différentes. On en déduit, en remplaçant λ par sa valeur,

$$x'=\frac{b''}{b}z+\frac{bc-b''c''}{b'b''-ab}\quad \text{et}\quad y'=\frac{b''}{b'}z'+\frac{b'c'-b''c''}{bb''-a'b'}.$$

Ce qui montre que le point (x', y', z') appartient à la fois aux deux plans

$$x = \frac{b''}{b} z + \frac{bc - b''c''}{b'b'' - ab}, \qquad y = \frac{b''}{b'} z + \frac{b'c' - b''c''}{bb'' - a'b'}.$$

L'axe de révolution est ainsi déterminé, et il est facile de reconnaître que cette droite est perpendiculaire au plan que chacune des équations (4), (5), (6) représente.

G.