NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VANNSON

Surfaces du second degré, problèmes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 334-341

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__334_0>

SURFACES DU SECOND DEGRÉ, PROBLÈMES;

Solutions par M. VANNSON.

Un ellipsoïde étant rapporté à trois diamètres conjugués, on propose de mener par l'origine un rayon qui soit maximum ou minimum.

L'équation de la surface sera

$$\frac{x^2}{a_{,}^2}+\frac{y^2}{b_{,}^2}+\frac{z^2}{c_{,}^2}=1.$$

Appelons A, B, C les angles que font les diamètres deux à deux et soient

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{c}=\mathrm{K},$$

les équations d'un rayon quelconque. Éliminant x, y, z entre ces quatre équations, nous aurons

$$\mathrm{K}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{m^2}{a_{,}^2}+\dfrac{n^2}{b_{,}^2}+\dfrac{p^2}{c_{,}^2}}},\qquad x=\frac{m}{\mathrm{R}},\quad y=\frac{n}{\mathrm{R}},\quad z=\frac{p}{\mathrm{R}},$$

R désignant le radical; si nous appelons l la longueur du rayon, nous aurons

$$l^2=x^2+y^2+z^2+2xy\cos\mathrm{C}+2yz\cos\mathrm{A}+2zx\cos\mathrm{B},$$

et, remplaçant x, y, z par leurs valeurs,

$$l^2=\frac{m^2+n^2+p^2+2np\cos\mathrm{A}+2pm\cos\mathrm{B}+2mn\cos\mathrm{C}}{\dfrac{m^2}{a_{,}^2}+\dfrac{n^2}{b_{,}^2}+\dfrac{p^2}{c_{,}^2}}.$$

Pour rendre cette expression maximum ou minimum,

m, n, p étant trois variables indépendantes, nous égalerons à zéro les dérivées prises successivement par rapport à chacune, ce qui, en divisant les équations ainsi obtenues membre à membre, nous donne

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{m + p\cos B + n\cos C}{\left(\frac{m}{a_{\prime}^{2}}\right)} &= \frac{n + m\cos C + p\cos A}{\left(\frac{n}{b_{\prime}^{2}}\right)} \\ &= \frac{p + n\cos A + m\cos B}{\left(\frac{p}{c_{\prime}^{2}}\right)}. \end{aligned}\right.$$

Appelant S un quelconque de ces rapports, nous aurons les trois équations

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} m\left(1 - \frac{S}{a_{\prime}^{2}}\right) + n\cos C + p\cos B = 0, \\ n\left(1 - \frac{S}{b_{\prime}^{2}}\right) + p\cos A + m\cos C = 0, \\ p\left(1 - \frac{S}{c_{\prime}^{2}}\right) + m\cos B + n\cos A = 0. \end{aligned}\right.$$

Ces trois équations n'ayant pas de terme indépendant, pour que les rapports $\frac{m}{p}$, $\frac{n}{p}$ soient déterminés, il faut que le dénominateur commun des trois inconnues soit nul, ce qui donne, après quelques réductions faciles,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &S^3 - S^2(a_{\prime}^{2} + b_{\prime}^{2} + c_{\prime}^{2}) \\ &+ S(b_{\prime}^{2}c_{\prime}^{2}\sin^2 A + c_{\prime}^{2}a_{\prime}^{2}\sin^2 B + a_{\prime}^{2}b_{\prime}^{2}\sin^2 C) \\ &+ a_{\prime}^{2}b_{\prime}^{2}c_{\prime}^{2}D = 0, \end{aligned}\right.$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$-D = 1 + 2\cos A\cos B\cos C - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C.$$

Si on décompose D en facteurs, on trouve aisément

$$D = 4\sin p\sin(p - A)\sin(p - B)\sin(p - C),$$

p étant la demi-somme de $(A + B + C)$. Or si on appelle V le volume du parallélipipède formé sur a', b', c', on a

$$V = 2a'\, b'\, c' \sqrt{\sin p \sin(p - A) \sin(p - B) \sin(p - C)}.$$

De cette remarque il résulte que le terme tout connu de l'équation (3) est égal à $-V^2$, V étant le volume du parallélipipède formé sur les trois diamètres conjugués.

Pour démontrer que les trois racines de l'équation (3) sont réelles, il n'y a qu'à suivre l'élégante méthode de discussion développée dans l'analyse de MM. Briot et Bouquet, page 308.

Ainsi on éliminera dans les équations (2) p par soustraction, on trouve ainsi

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{m}{\left[\dfrac{1}{\cos A\left(\dfrac{S}{a_{,}^{2}} - 1\right) + \cos B \cos C}\right]} \\ = & \frac{n}{\left[\dfrac{1}{\cos B\left(\dfrac{S}{b_{,}^{2}} - 1\right) + \cos A \cos C}\right]} \\ = & \frac{p}{\left[\dfrac{1}{\cos C\left(\dfrac{S}{c_{,}^{2}} - 1\right) + \cos A \cos B}\right]}; \end{aligned} \right.$$

remplaçant dans la première des équations (2) m, n, p par leurs quantités proportionnelles, on trouve

$$(5)\quad \frac{\dfrac{a_{,}^{2} \cos B \cos C}{\cos A}}{S - \alpha} + \frac{\dfrac{b_{,}^{2} \cos C \cos A}{\cos B}}{S - \beta} + \frac{\dfrac{c_{,}^{2} \cos A \cos B}{\cos C}}{S - \gamma} = 1,$$

après avoir posé

$$\alpha = a_{,}^{2}\left(1 - \frac{\cos B \cos C}{\cos A}\right), \text{ etc.}$$

Tant que les quantités α, 6, γ sont inégales, on démontre que l'équation (5) a ses trois racines réelles et inégales, et elles sont positives, comme le montre l'équation (3). Or ces racines ne sont autres que les carrés des demi-axes. Cela résulte des équations (1), car si on multiplie les deux termes de chaque fraction respectivement par m, n, p, et qu'on divise ensuite la somme des numérateurs par celle des dénominateurs, on trouve $S = l^2$. Ainsi, dans le cas où α, 6, γ sont des quantités différentes, les trois axes sont inégaux. Les équations qui donnent la direction de ces axes sont, en ayant égard aux équations (5),

$$\frac{x \cos A (S - \alpha)}{a_{,}^2} = \frac{y \cos B (S - 6)}{b_{,}^2} = \frac{z \cos C (S - \gamma)}{c_{,}^2}.$$

Ces équations donneront pour chaque valeur de S une direction déterminée.

Si $\alpha = 6$, une des valeurs de S égalera α; les équations (4) donnent dans ce cas $p = 0$, et la dernière des équations (2) devient

$$m \cos B + n \cos A = 0:$$

ainsi les équations d'un des axes sont

$$z = 0 \quad \text{et} \quad x \cos B + y \cos A = 0.$$

Ainsi, quand on a $\alpha = 6$, un des trois axes est dans le plan de deux diamètres conjugués, et réciproquement si dans l'équation $\alpha = 6$ on remplace α et 6 par leurs valeurs, elle devient

$$(6) \quad a_{,}^2 \left(\frac{\cos A - \cos B \cos C}{\cos A}\right) = b_{,}^2 \left(\frac{\cos B - \cos A \cos C}{\cos B}\right).$$

Or si on appelle A′ le dièdre opposé à la face A dans l'angle solide que forment les trois diamètres donnés, on aura

$$\cos A' = \frac{\cos A - \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

et

$$\cos B' = \frac{\cos B - \cos A \cos C}{\sin A \sin C},$$

valeurs qui, combinées avec l'équation (6), donneront

$$\frac{a_{,}^{2}}{b_{,}^{2}} = \frac{\left(\frac{\sin 2A}{\cos A'}\right)}{\left(\frac{\sin 2B}{\cos B'}\right)}.$$

On voit donc que dans un système de trois diamètres conjugués, si deux d'entre eux sont dans un même plan avec un axe, le carré de chacun des deux est proportionnel au sinus de deux fois l'angle compris entre les deux autres, divisé par le cosinus du dièdre opposé à cet angle.

Quand les trois quantités α, 6, γ sont égales, l'équation (5) a deux racines égales à α, donc la surface a deux axes égaux, elle est de révolution, et il n'y a de déterminé que la direction du troisième axe, correspondante à la troisième racine.

Si dans l'équation (3) on examine la somme des racines, leur produit, etc., on en conclut ces trois relations :

La somme des carrés des diamètres conjugués est constante ; le volume du parallélipipède construit sur trois diamètres conjugués est constant; et enfin dans ce même parallélipipède, la somme de carrés des faces est toujours la même pour tous les systèmes de diamètres conjugués.

Probleme. *Une surface du second degré étant* *éclairée par des rayons de lumière partant d'un point* (x', y', z'), *trouver l'équation de la surface conique formée par les rayons tangents à la surface proposée.*

Lemme. Soit $\varphi = 0$ l'équation de la surface; on sait que la courbe de séparation d'ombre et de lumière, base du cône cherché, est plane. Son plan, qui n'est autre que le plan polaire du point (x', y', z'), a pour équation

$$\frac{x}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)' + \frac{y}{2}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)' + \frac{z}{2}\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)' + Cx' + C'y' + C''z' + F = 0,$$

$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)'$ représentant la dérivée de φ relative à x, dans laquelle on a remplacé x, y, z par x', y' z'; si dans cette équation du plan polaire, que nous représenterons, pour abréger, par $\psi = 0$, nous remplaçons x, y, z par les lettres accentuées, nous trouverons un résultat égal à $(\varphi)'$, ainsi

$$(\psi)' = (\varphi)'. \tag{1}$$

Cela posé, prenons l'équation générale des surfaces du second degré passant par la courbe de séparation, son équation sera

$$\varphi + \lambda\psi = 0,$$

λ étant le premier membre de l'équation générale d'un plan. Ainsi λ a quatre indéterminées, ce qui montre que la condition de passer par la courbe donnée tient lieu de cinq points. Si maintenant on cherche l'intersection des deux surfaces, on trouve pour deuxième courbe

$$\lambda = 0, \quad \varphi = 0.$$

Mais cette courbe doit être identique à la première, donc λ et ψ ne diffèrent que par un facteur numérique, donc

$$\lambda = \alpha\psi,$$

ce qui donne pour équation de la surface tangente

$$\varphi + \alpha\psi^2 = 0;$$

mais elle doit contenir le point (x', y', z'), d'où

$$\varphi' + \alpha\psi'^2 = 0,$$

et

$$\alpha = -\frac{1}{\varphi'},$$

en ayant égard à la relation (1). On a donc pour l'équation demandée

$$\varphi'\varphi = \psi^2.$$

Il reste à faire voir que cette équation représente bien la surface d'un cône. Pour cela on peut chercher les coordonnées du centre et remarquer que ces coordonnées vérifient l'équation de la surface. On peut dire encore : si on joint le point (x', y', z') à un point D pris sur la courbe de séparation, cette droite aura trois points communs avec la surface trouvée, le point D étant un point double ou un point de contact de cette droite avec la surface. Donc cette droite est tout entière dans la surface; c'est donc une surface conique.

Si on suppose que les rayons de lumière, au lieu de partir d'un point fixe, soient parallèles à une direction donnée par les angles α, 6, γ, la même équation donnera le résultat. Pour cela, appelons l la distance du point à l'origine, nous aurons

$$x' = l\cos\alpha, \quad y' = l\cos 6, \quad z' = l\cos\gamma.$$

Après avoir substitué ces valeurs aux coordonnées, on fera $l = \infty$, puis on divisera le tout par l^2. Si donc nous appelons $f(\alpha)$ le groupe des termes du deuxième degré, après y avoir remplacé x', y', z' par les trois cosinus, et par $\psi(\alpha)$ celle du plan polaire après les mêmes substitutions et abstraction faite du terme indépendant, nous aurons pour équation de la surface cylindrique demandée

$$\varphi f(\alpha) = [\psi(\alpha)]^2.$$

Exemples. Considérons les surfaces du second degré rapportées à leurs plans principaux

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 \pm 1 = 0,$$

l'équation de la surface du cône sera

$$(Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 \pm 1)(Ax_{,}^2 + A'y_{,}^2 + A''z_{,}^2 \pm 1)$$
$$= (Axx' + A'yy' + A''zz' \pm 1)^2,$$

et celle de la surface cylindrique tangente sera

$$(Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 \pm 1)(A\cos^2\alpha + A'\cos^2 6 + A''\cos\gamma)$$
$$= (Ax\cos\alpha + A'y\cos 6 + A''z\cos\gamma)^2.$$