NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VANNSON

Formules fondamentales de l’analyse sphérique (voir page 243)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 307-314

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__307_1>

FORMULES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE SPHÉRIQUE

(voir page 243);

PAR M. VANNSON.

THÉORÈME. *Si au centre d'une ellipse on fait un angle droit et qu'on prolonge ses côtés jusqu'à la rencontre du cercle principal aux points* A *et* B, *qu'on projette les points* A *et* B *sur l'axe commun, au moyen des arcs* AP, BQ *coupant l'ellipse en* A′, B′, *qu'on trace les arcs* OA′, OB′, *on aura construit un système de diamètres conjugués.*

En effet, nommons α, α' les angles de OA′, OB′ avec l'axe; x', y' les tangentes des coordonnées de A′; x'', y'' celles de B′, nous aurons

$$\text{tang}\,\alpha\;\text{tang}\,\alpha' = \frac{y'\,y''}{x'\,x''};$$

(*) La solution qu'on a voulu déduire de la determination du maximum et du minimum d'une fonction continue n'est pas rigoureuse.

mais si on appelle Y', Y'' les tangentes des coordonnées de A, B, on aura

$$y' y'' = \frac{Y' Y'' b^2}{a^2},$$

donc

$$\text{tang}\,\alpha\,.\,\text{tang}\,\alpha' = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{Y'}{x'}\cdot\frac{Y''}{x''} = -\frac{b^2}{a^2}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. Dans le triangle rectangle AOP on a

$$x' = a \cos \text{AOP},$$

et de même

$$x'' = -a \sin \text{AOP},$$

donc

$$x_{,}^2 + x_{,,}^2 = a^2;$$

on verra de la même manière que

$$y_{,}^2 + y_{,,}^2 = b^2.$$

Ajoutant ces égalités membre à membre, on a la relation

$$a_{,}^2 + b_{,}^2 = a^2 + b^2.$$

2°. Si on appelle φ l'angle OAP, on voit sur la figure qu'on a

$$a' \cos \alpha = a \cos \varphi;$$

de même, en construisant le cercle principal sur le second axe, on aura

$$b' \sin \alpha' = b \cos \varphi;$$

en multipliant ces égalités membre à membre, on a

$$a' b' \sin \alpha' \cos \alpha = ab \cos^2 \varphi,$$

on trouve de même

$$a' b' \sin \alpha \cos \alpha' = -ab \sin^2 \varphi;$$

d'où par soustraction

$$a' b' \sin(\alpha' - \alpha) = ab.$$

3°. L'égalité

$$x_{,}^{2} + x_{,,}^{2} = a^{2}$$

peut s'énoncer ainsi :

La somme des tangentes carrées des projections de deux demi-diamètres conjugués sur un des axes égale la tangente carrée de la moitié de cet axe ; enfin on a la relation

$$a^{2}\cos^{2}\varphi + b^{2}\sin^{2}\varphi = a_{,}^{2},$$

c'est-à-dire que la somme des tangentes carrées des projections des deux axes sur un diamètre égale la tangente carrée de la moitié de ce même diamètre.

Ces relations donnent la solution d'un grand nombre de problèmes relatifs à l'ellipse sphérique ; nous nous bornerons aux principaux.

1. Connaissant deux diamètres conjugués α', $\text{ϐ}'$ et leur angle θ, trouver la grandeur des axes. On trouve

$$a+b=\sqrt{a_{,}^{2}+b_{,}^{2}-2a'\,b'\sin\theta}, \quad a-b=\sqrt{a_{,}^{2}+b_{,}^{2}+2a'\,b'\sin\theta}.$$

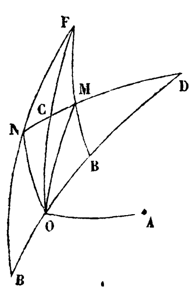
Si on se reporte à l'équation d'un petit cercle en coordonnées obliques, on est conduit à la construction suivante :

Soient

$$OA = \alpha', \quad OB = \text{ϐ}',$$

et l'angle $O = \theta$. Faisons au point O l'angle droit AOC

FIG. 1



et prenons

$$OC = OA,$$

prenons aussi l'arc

$$OBD = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad OCF = \frac{\pi}{2},$$

joignons C, D et F, B, soit M la rencontre..., tang OM représentera $a + b$; prenons ensuite $OB' = OB$, joignons F à B', et soit N la rencontre des arcs FB' et DC; on aura

$$\text{tang ON} = a - q,$$

d'où on tire

$$a = \frac{\text{tang OM} + \text{tang ON}}{2}, \quad b = \frac{\text{tang OM} - \text{tang ON}}{2},$$

expressions que nous avons déjà construites.

Pour trouver la direction des axes, nous avons les relations

$$\alpha' - \alpha = \theta \quad \text{et} \quad \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\alpha' = -\frac{b^2}{a^2};$$

si nous nommons β le supplément de α', nous aurons

$$\alpha + \beta = \pi - \theta \quad \text{et} \quad \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta = \frac{b^2}{a^2};$$

le problème revient donc à partager un arc donné $\pi - \theta$ en deux segments tels, que le produit de leurs tangentes égale $\frac{b^2}{a^2}$ (question déjà résolue géométriquement).

Connaissant trois des six quantités a, b, a', b', α, α', on propose de trouver les trois autres.

PROBLÈME I. *On donne* a, b, α, *trouver* a', b', α'.

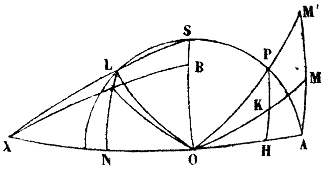
Soient

$$OA = a, \quad OB = b \quad \text{et} \quad MOA = \alpha;$$

cela revient à trouver l'intersection de l'ellipse, sans la construire, avec le cercle OM.

Pour cela, j'élève AM perpendiculaire à OA, et je

Fig 2.



prends AM′ tel, qu'on ait

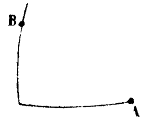
$$\frac{\text{tang AM}'}{\text{tang AM}}=\frac{\text{tang } a}{\text{tang } b};$$

je trace l'arc OM′; soit P sa rencontre avec le cercle principal; menons l'ordonnée PH; le point K où elle coupe OM sera évidemment l'extrémité de a'. Construisons l'angle droit POL, prolongeons l'arc SL jusqu'en X, tirons BX; la rencontre de cet arc avec l'ordonnée LN sera l'extrémité du diamètre b'.

Remarque. Le procédé que nous venons d'employer pour construire la rencontre d'un grand cercle OM avec une ellipse non construite, mais dont on a les axes, s'applique à une position quelconque du cercle sécant, en sorte qu'un problème peut être regardé comme résolu graphiquement si on le ramène à trouver l'intersection d'un grand cercle et d'une ellipse dont on a les axes en grandeur et en direction.

Problème II. *On donne* a, b, a′, *trouver les trois autres quantités.*

Fig 3.



Considérons ces trois nombres donnés comme des tangentes, et soient x', y' les tangentes des coordonnées de l'extrémité du diamètre donné; on a

$$x' = a' \cos\alpha, \quad y' = a' \sin\alpha.$$

Portant ces valeurs dans l'équation de la courbe, on a

$$\frac{1}{a_{\prime}^{2}} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}.$$

On tire de là une valeur de $\operatorname{tang}\alpha$ facile à construire au moyen des propriétés du triangle rectangle et en se rappelant l'équation du petit cercle $x^2 + y^2 = r^2$.

Problème III. *On donne* a′, b′, α (a′, b′ *étant des tangentes*).

On vient de trouver la relation

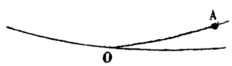
$$\frac{1}{a_{\prime}^{2}} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2},$$

et on a

$$b^2 = a_1^2 + b_1^2 - a^2,$$

ce qui donne pour trouver a^2 une équation du deuxième

Fig. 4.



degré. La condition de réalité des racines est

$$b_{\prime}^{2} > 2a_{\prime}^{2} \sin\alpha \cos\alpha$$

ou

$$b_1^2 > a_1^2 \sin 2\alpha.$$

Si on prend pour b'^2 cette valeur minimum, on trouve que

$$\operatorname{tang}\alpha' = -1.$$

Ce qui démontre le théorème suivant :

Étant donnés les directions des axes d'une ellipse et un point A, *parmi toutes les ellipses qu'on peut construire avec ces données, il y en a une dans laquelle le conjugué du diamètre* OA *est un minimum, et dans cette ellipse la direction du conjugué divise l'angle des axes en deux parties égales.*

Pour la construire, il faut résoudre le problème suivant :

Problème IV. *On donne* a', α, α', *trouver les trois autres quantités*, a' *désigne un arc.*

Soient

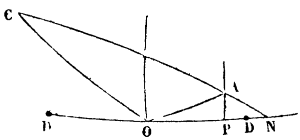
$$\mathrm{AON} = \alpha, \quad \mathrm{CON} = \alpha', \quad \mathrm{OA} = a'.$$

Si nous prenons

$$\mathrm{OC} = \frac{\pi}{2}$$

et que nous menions l'arc CA, il sera tangent à l'ellipse

Fig 5



proposée. Donc appelant a la tangente de l'axe suivant ON, on aura

$$a^2 = \mathrm{tang\,ON\ tang\,OP},$$

ce qui permet de trouver géométriquement la grandeur de l'axe DD'. Le reste se trouve par des moyens déjà exposés.

Nous n'examinerons pas ici les autres cas qui se résolvent par des constructions analogues aux précédentes.

Si l'on prend pour axes de coordonnées un système de diamètres conjugués, il est évident que l'équation conservera la même forme. On peut donc rapporter la courbe à deux diamètres par la transformation des coordonnées ; le calcul se fait comme pour les courbes planes.