NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

POUDRA

Équation d'une surface du deuxième degré passant par neuf points

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 297-301

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__297_1>

ÉQUATION D'UNE SURFACE DU DEUXIÈME DEGRÉ PASSANT PAR NEUF POINTS;

PAR M. POUDRA.

1. Soient x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3, les coordonnées respectives de trois points, et $ax + by + cz = d$ l'équation du plan qui passe par ces trois points; on a

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = d,$$
$$ax_2 + by_2 + cz_2 = d,$$
$$ax_3 + by_3 + cz_3 = d;$$

d'où l'on déduit

$$(x_1 y_2 z_3) = \frac{(d y_2 z_3)}{a} = \frac{(x_1 d z_3)}{b} = \frac{(x_1 y_2 d)}{c}$$

et de là pour l'équation du plan

$$(d y_2 z_3)\, x + (x_1 d z_3)\, y + (x_1 y_2 d)\, z = d\,(x_1 y_2 z_3);$$

les parenthèses désignent des déterminants.

Ou bien

$$\begin{gathered} x\,[(y_1 z_2) + (y_2 z_3) + (y_3 z_4)] + y\,[(x_1 z_3) + (x_2 z_1) + (x_3 z_2)] \\ + z\,[(x_1 y_2) + (x_2 y_3) + (x_3 y_1)] = (x_1 y_2 z_3), \end{gathered}$$

et développant

$$\begin{aligned} & x\,[y_1 (z_2 - z_3) + y_2 (z_3 - z_1) + y_3 (z_1 - z_2)] \\ & + y\,[z_1 (x_2 - x_3) + z_2 (x_3 - x_1) + z_3 (x_1 - x_2)] \\ & + z\,(x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)] \\ & = x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1 \end{aligned}$$

2. Soient les neuf points A, B, C, D, E, F, F, H, I, ayant pour coordonnées respectives, savoir

A.....	x_1,	y_1,	z_1,
B.....	x_2,	y_2,	z_2,
C.....	x_3,	y_3,	z_3,
.....	...	...	...
I.....	x_9,	y_9,	z_9,

Concevons le tétraèdre ABCD; d'après le § 1, on peut trouver les équations des plans, faces du solide.

Désignons par

$a = 0$	l'équation des plans	BCD,
$b = 0$	»	ACD,
$c = 0$	»	ABD,
$d = 0$	»	ABC.

Désignons par a_5, b_5 ce que deviennent a et b lorsqu'on y remplace x, y, z respectivement par les coordonnées x_5, y_5, z_5 du point E, et ainsi des autres; on obtient pour

l'équation du plan	CDE	$ab_5 - ba_5 = o$,
»	CDF	$ab_6 - ba_6 = o$,
»	ABE	$cd_5 - dc_5 = o$,
»	ABF	$cd_5 - dc_6 = o$.

Le faisceau de surfaces donné par l'équation

$$(ab_5 - ba_5)(cd_6 - dc_6) - K(ab_6 - ba_6)(cd_5\ dc_5) = o,$$

où K est une indéterminée, passe par les six points A, B, C, D, E, F, ce qu'on peut écrire d'une manière abrégée

$$(ab_5)(cd_6) - K(ab_6)(cd_5) = o.$$

Déterminons K de mauière qu'une des surfaces du faisceau passe par le septième point G (x_y, y_z, z_x); alors il vient

$$R = (ab_5)(cd_6)(a_7 b_6)(c_7 d_5) - (ab_6)(cd_5)(a_7 b_5)(c_7 d_6) = o.$$

Les parenthèses sont des binômes alternés et $R = o$ est une des surfaces qui passent par les sept points A, B, C, D, E, F, G, et cette surface est réglée; car les deux droites AB, CD, arêtes opposées du tétatrèdre ABCD, sont entièrement sur cette surface.

Par ces mêmes sept points, on peut faire passer une seconde surface réglée S renfermant les deux droites AD, CB; pour avoir S, il suffit de changer dans R b en d et d en b; on obtient

$$S = (ad_5)(cb_5)(a_7 d_6)(c_7 b_5) - (ad_6)(cb_5)(a_7 d_5)(c_7 b_6) = o.$$

Enfin par ces mêmes points on peut faire passer une troisième surface réglée I renfermant les deux droites

AC, BD; il suffit de changer dans R, b en c et c en b; on a

$$I = (ac_5)(bd_6)(a_7 c_6)(b_7 d_5) - (ac_6)(bd_5)(a_7 c_5)(b_7 d_6);$$

la surface du deuxième degré donnée par l'équation

$$pR + qS = T$$

passe évidemment par les sept points A, B, C, D, E, F, G, et en général n'est plus réglée et les deux indéterminées p et q peuvent servir à faire passer la surface par les deux points restants H et I; désignant par R_8, S_8, T_8; R_9, S_9, T_9 ce que deviennent respectivement R, S, T en remplaçant x, y, z successivement par x_8, y_8, z_8; x_9, y_9, z_9 on a

$$pR_8 + qS_8 = T_8,$$
$$pR_9 + qS_9 = T_9,$$

d'où l'on tire

$$(R_8 S_9) = \frac{(T_8 S_9)}{p} + \frac{(R_8 T_9)}{q};$$

ainsi l'équation de la surface qui passe par les neufs points donnés sera

$$(1) \qquad (T_8 S_9) R + (R_8 T_9) S + (S_9 R_8) T = 0.$$

R renferme 32 termes; $(T_8 S_9)$ renferme 2.32^2 termes, ainsi $(T_8 S_9)$ R contient 2.32^3 termes, et l'équation (1) contient en général $6.32^3 = 196608$ termes; c'est le nombre en considérant a, b, c, d comme des monômes; mais chacun renferme vingt-quatre termes exprimés en fonction des coordonnées; ainsi le nombre des termes de l'équation en fonction des vingt-sept coordonnées est $3^{13}.2^{52}$ termes = 7,180,264,989,898,998,898,989, nombre composé de vingt-deux chiffres, mais dans les calculs numériques le nombre de termes se réduit considérablement.

3. Si x_1, y_1, z_1, sont les coordonnées d'un dixième point situé sur la même surface, et si l'on désigne par

R_{10}, S_{10}, T_{10}, ce que deviennent R, S, T en y remplaçant x, y, z par x_{10}, y_{10}, z_{10}, on a la relation suivante entre les coordonnées de dix points situés sur la surface

$$(T_8 S_9) R_{10} + (R_8 T_9) S_{10} + (S_9 R_8) T_{10} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} T_8, & T_9, & T_{10} \\ S_8, & S_9, & S_{10} \\ R_8, & R_9, & R_{10} \end{vmatrix} = 0.$$