Question d'examen (École navale)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 283-284

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__283_1>

QUESTION D'EXAMEN (ÉCOLE NAVALE).

Trouver la limite du produit $\cos a \, . \cos\frac{a}{2} \, . \cos\frac{a}{4} \, . \cos\frac{a}{8} \ldots$

Euler a résolu la question; il ne l'aurait pas proposée dans les examens d'admissibilité à l'École Navale.

On a

$$\sin 2a = 2 . \sin a . \cos a,$$

$$\sin a = 2 . \sin\left(\frac{a}{2}\right) . \cos\left(\frac{a}{2}\right),$$

$$\sin\left(\frac{a}{2}\right) = 2 . \sin\left(\frac{a}{4}\right) . \cos\left(\frac{a}{4}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right) = 2 . \sin\left(\frac{a}{2^n}\right) . \cos\left(\frac{a}{2^n}\right).$$

La multiplication de ces équations donne

$$\sin 2a = 2^{n+1} \sin'\left(\frac{a}{2^n}\right) \times \cos a . \cos\left(\frac{a}{2}\right) \cos\left(\frac{a}{2^2}\right) \ldots \cos\left(\frac{a}{2^n}\right),$$

d'où

$$\cos a . \cos\left(\frac{a}{2}\right) \cos\left(\frac{a}{2^2}\right) \ldots \cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin 2a}{2^{n+1} . \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)},$$

mais

$$\frac{\sin 2a}{2^{n+1}.\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}=\frac{\left(\frac{\sin 2a}{2a}\right)}{\frac{2^{n+1}\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}{2a}}=\frac{\left(\frac{\sin 2a}{2a}\right)}{\left(\frac{\sin .\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}\right)}.$$

Quand n augmente indéfiniment, la fraction $\frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\left(\frac{a}{2^n}\right)}$ moindre que l'unité augmente aussi, et tend vers l'unité. A la limite ($n=\infty$) on a

$$\frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}=1.$$

Donc la limite du produit $\cos a.\cos\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{4}\right)\ldots$, est $\frac{\sin 2a}{2a}$ ou $\cos a\times\frac{\sin a}{a}$.

Supposons

$$a=\frac{\pi}{4};$$

il en résultera

$$2a=\frac{\pi}{2};\quad \sin 2a=1;$$

et par suite

$$\lim.\cos\left(\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)\ldots=\frac{2}{\pi};$$

d'où

$$\pi=\frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)\ldots}.$$

G.