Nouvelles annales de mathématiques

Vannson

Formules fondamentales de l'analyse sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 243-261

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__243_1>

FORMULES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE SPHÉRIQUE

(voir page 209);

PAR M. VANNSON.

PROBLÈME. *Déterminer les foyers dans une courbe sphérique du second degré, la courbe étant rapportée à son centre et à ses axes.*

16.

Nous appellerons *foyer* un point tel, que la tangente de sa distance δ, à un point quelconque de la courbe, soit une fonction rationnelle de l'abscisse du point, de la forme $\frac{nx+p}{1+n'x}$. Si nous appelons x' et y' les tangentes des coordonnées du point inconnu, nous aurons

$$\text{tang}\,\delta = \frac{\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2+(yx'-y'x)^2}}{1+yy'+xx'},$$

Le dénominateur étant rationnel, il faut que le numérateur le soit; d'où l'on conclura comme sur un plan que y' doit être nul, et si on remplace y^2 par sa valeur tirée de l'équation de la courbe, la quantité qu'on trouvera sous le radical devra être un carré, ce qui donne

$$x'^2 = \frac{a^2-b^2}{1+b^2}:$$

d'où il résulte qu'on doit avoir

$$a^2 > b^2.$$

Si on désigne par γ la distance du centre au foyer, et par α et 6 les deux demi-axes, on tire de l'équation précédente

$$\cos\gamma = \frac{1+b^2}{1+a^2} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2 6};$$

les foyers s'obtiennent donc comme pour l'ellipse plane, en construisant un triangle rectangle dont on connaît l'hypoténuse et un côté. Quant à l'expression de tang δ, elle devient, en appelant c la tangente de l'arc γ,

$$\text{tang}\,\delta = \frac{a-\frac{cx}{a}}{1+cx},$$

et si on pose

$$\frac{cx}{a} = \text{tang}\,\varphi,$$

on trouve

$$\tang \delta = \tang (\alpha - \varphi),$$

ou

$$\delta = \alpha - \varphi.$$

Si on appelle δ' la distance du point de la courbe à l'autre foyer, on aura

$$\delta' = \alpha + \varphi;$$

donc

$$\delta + \delta' = 2\alpha.$$

On a aussi

$$\tang \frac{\delta' - \delta}{2} = \varphi;$$

d'où l'on voit qu'on a

$$\tang.\left(\frac{\delta' - \delta}{2}\right) = \frac{cx}{a}.$$

On peut se proposer le problème inverse, c'est-à-dire chercher le lieu des points tels, que la somme de leurs distances à deux points fixes soit constante; on retombe sur l'équation de l'ellipse.

Quand la courbe n'est pas rapportée à ses axes, on appelle *foyer* un point tel, que la tangente de sa distance (δ) à un point quelconque de la courbe est une fonction rationnelle des tangentes des coordonnées de ce point, de la forme $\frac{my + nx + p}{m'y + n'x + 1}$; d'après l'expression trouvée pour tang δ, on doit donc avoir

$$(my + nx + p)^2 = (y - y')^2 + (x - x')^2 + (yx' - y'x)^2.$$

Cette équation devant avoir lieu pour tous les points de la courbe, est identique à l'équation de la courbe, ce qui donne cinq relations pour déterminer les cinq inconnues m, n, p, x', y'. On peut prendre des coefficients quelconques; mais, pour abréger le calcul et la discussion, nous supposerons la courbe rapportée à son centre intérieur, ce qui donnera

$$D = E = 0 \quad \text{et} \quad B^2 < 4AC,$$

d'où

$$F < 0,$$

pour qu'il y ait une courbe réelle. Les équations à résoudre seront donc

$$(1) \qquad mp + y' = 0, \quad np + x' = 0,$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{m^2 - x_1^2 - 1}{A} = \frac{n^2 - y_1^2 - 1}{C} \\ & = \frac{2(mn + y'x')}{B} = \frac{p^2 - x_1^2 - y_1^2}{F}; \end{aligned} \right.$$

les deux premières donnent

$$y' = -mp, \quad x' = -np;$$

d'où

$$\frac{y'}{x'} = \frac{m}{n}.$$

Ce qui fait voir déjà que les points démandés sont sur la circonférence d'un grand cercle passant par le centre et perpendiculaire au cercle qui aurait pour équation

$$my + nx + p = 0.$$

Cette circonférence, contenant les points demandés, sera connue quand nous aurons calculé le rapport $\frac{m}{n}$. On tire aussi des équations

$$(1) \qquad x_,^2 + y_,^2 = p^2(m^2 + n^2),$$

ce qui place les points demandés sur un second cercle concentrique à la courbe, et qui sera connu quand nous aurons trouvé p^2 et m^2+n^2.

Pour avoir le rapport $\frac{m}{n}$, je remplace dans les équations (2) x' et y' par leurs valeurs, ce qui donne

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{m^2-n^2p^2-1}{A}=\frac{n^2-m^2p^2-1}{C}\\ &=\frac{2mn(1+p^2)}{B}=\frac{p^2(1-m^2-n^2)}{F}. \end{aligned}\right.$$

Si je divise dans les deux premiers rapports la différence des numérateurs par celle des dénominateurs, j'aurai un rapport que je pourrai égaler au troisième, j'aurai donc

$$\frac{m}{n}-\frac{n}{m}=\frac{2(A-C)}{B};$$

posant

$$\frac{m}{n}=z,$$

j'aurai l'équation

$$z^2-2\frac{(A-C)}{B}z-1=0.$$

Il faut choisir celle des valeurs de z qui convient à la question; or nous avons $B^2<4AC$, d'où il est aisé de conclure que $1-m^2-n^2$ est positif, et, d'après le signe de F, que le produit mn est de signe contraire à celui de B; il en sera de même pour $\frac{m}{n}$. Ainsi il faut prendre celle des valeurs de z qui est de signe contraire avec B. Soit, pour fixer les idées, $B<0$, nous prendrons la racine positive; et, si nous supposons $A<C$, ce sera la plus grande: elle sera donc supérieure à 1; soit α cette racine, nous aurons $m=n\alpha$. Maintenant l'égalité des deux pre

miers rapports (3) nous donne

$$p^2 = \frac{(m^2 - 1)C - (n^2 - 1)A}{Cn^2 - Am^2}:$$

portant cette valeur dans l'équation formée par le premier et le dernier rapport, et posant $m = n\alpha$, nous obtenons

$$n^2 = \frac{C - A}{\alpha^2(C - F) - (A - F)},$$

expression évidemment positive ; d'où

$$m^2 = \frac{\alpha^2(C - A)}{\alpha^2(C - F) - (A - F)} \quad \text{et} \quad p^2 = \frac{F(\alpha^2 - 1)}{C - A\alpha^2}.$$

Pour que cette dernière expression soit positive, il faut qu'on ait

$$\alpha^2 > \frac{C}{A} \quad \text{ou} \quad \alpha > \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}},$$

condition qui est satisfaite; car si nous remplaçons dans l'équation qui donne z, cette lettre par $\sqrt{\frac{C}{A}}$, nous obtenons un résultat négatif; donc $\sqrt{\frac{C}{A}}$ tombe entre les deux racines, la positive ou α est donc plus grande que $\sqrt{\frac{C}{A}}$.

Déterminer la directrice dans une courbe quelconque du second degré. Si nous appelons δ la distance d'un point quelconque de la courbe à la circonférence qui a pour équation

$$my + nx + p = 0,$$

nous aurons, d'après une des formules précédentes,

$$\sin\delta = \frac{my + nx + p}{\sqrt{1 + x^2 + y^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Nous avons déjà pour la distance du même point de la courbe au foyer

$$\sin \delta = \frac{\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2+(yx'-y'x)^2}}{\sqrt{1+x^2+y^2}\sqrt{1+x_1^2+y_1^2}};$$

d'où

$$\frac{\sin \delta'}{\sin \delta} = \frac{\sqrt{1+x_1^2+y_1^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

quantité constante.

Donc, étant donnée une courbe sphérique du second degré et un de ses foyers, on peut trouver une circonférence de grand cercle telle, que les sinus des distances d'un point de la courbe à cette circonférence et au foyer donné soient dans un rapport constant. On aura donc deux directrices correspondantes chacune à chaque foyer, et, pour avoir l'équation d'une directrice, il suffit d'égaler à zéro le numérateur de la fraction rationnelle qui donne la tangente de la distance d'un point au foyer. Ainsi, quand la courbe est rapportée à ses axes, on trouve

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{a - \frac{cx}{a}}{1+cx}.$$

L'équation d'une des directrices est donc

$$x = \frac{a^2}{c};$$

ce qui montre que la directrice est la polaire du foyer, comme on peut le démontrer aussi sur l'équation générale. Pour obtenir géométriquement la directrice, il suffira donc d'élever par le foyer un arc perpendiculaire à l'axe jusqu'à la rencontre du cercle principal, de mener à ce cercle par le point de rencontre un arc tangent, qu'on prolongera jusqu'à l'axe; on aura ainsi le pied de la directrice, ce qui suffira pour la déterminer. L'expression de tang δ donne encore

$$p = a, \quad m = 0, \quad n = -\frac{c}{a};$$

donc on aura

$$\frac{\sin \delta'}{\sin \delta} = \frac{\sqrt{1 + c^2}}{\sqrt{a^2 + \frac{c^2}{a^2}}} = \frac{a\sqrt{1 + c^2}}{c\sqrt{1 + \frac{a^4}{c^2}}} = \frac{\operatorname{tang} \alpha \cos \varphi}{\sin \gamma},$$

en appelant φ la distance du centre à la directrice, γ celle du centre au foyer, et α le demi-axe des foyers.

Théorème. *Si une circonférence de grand cercle coupe la courbe en deux points* A *et* B, *et si on la prolonge jusqu'à la rencontre de la directrice en* C, *l'arc qui joindra le point* C *au foyer* F *correspondant à cette directrice, divisera en deux parties égales l'angle extérieur du triangle* ABP.

Se démontre comme sur un plan.

Corollaire. Si l'arc qu'on prolonge jusqu'à la directrice est tangent à la courbe au point A, l'angle AFC sera droit; d'où il résulte que la polaire d'un point C de la directrice passe au foyer, et fait un angle droit avec l'arc qui joint le point C au foyer. De là un moyen graphique de mener une tangente à la courbe par un point de son contour, et aussi par un point quelconque. En effet, soit A ce point; supposons le problème résolu et soient m et n les points où la polaire de A coupe les deux directrices, joignons A au foyer F, et concevons cet arc prolongé jusqu'à ce qu'il coupe la directrice correspondante; soit D le point de rencontre, les trois points A, F, D étant sur une même circonférence, leurs polaires passent au même point; or la polaire du foyer est la directrice, et la polaire du point D est une circonférence menée par F perpendiculairement à l'arc AFD : donc la rencontre de cet arc avec la directrice donnera le point n. Le point m se trouvera de même, en joignant A au deuxième foyer F', et en menant sur AF' un arc perpendiculaire prolongé jusqu'à la deuxième directrice; on joindra ensuite les points m et n par un arc de grand cercle qui sera en général la polaire du point A. Les points de contact seront à l'intersection de cette circonférence polaire avec la courbe. Si la courbe n'est pas tracée et qu'on connaisse ses foyers et l'axe, on pourra trouver les deux points de rencontre géométriquement.

Problème. *Étant donnés un foyer, sa directrice et un point* A, *construire la courbe.*

Si du foyer F nous abaissons sur la directrice un arc perpendiculaire coupant la directrice au point m, nous aurons ainsi la direction de l'axe; pour trouver les sommets, abaissons du point A une perpendiculaire sur la directrice, soit P son pied. Menons la bissectrice AD de l'angle PAF; le point D divisera l'arc FB en deux parties, dont les sinus seront comme sinus AP est à sinus AF. Pour avoir un sommet, il suffit donc de diviser l'arc Fm de la même manière. Pour cela, il faut prendre à partir du milieu I de mP un arc IH d'un quadrant, et joindre H au point D, la rencontre de l'arc HD avec l'axe sera un des sommets; faites la même construction après avoir tracé la bissectrice extérieure au sommet A du triangle PAD, vous aurez le second sommet de la courbe.

Problème. *Étant donnés un foyer* F *et trois points* A, B, C *d'une conique sphérique, la construire.*

La construction géométrique qu'on emploie sur un plan s'applique sur la sphère et donne quatre solutions. Nous allons indiquer la solution analytique. Si nous prenons le foyer comme origine des coordonnées et des axes rectangles, l'équation de la courbe sera

$$x^2+y^2=(my+nx+p)^2,$$

m, n, p sont les inconnues. Soient α et β les tangentes des coordonnées du premier point, et δ la tangente de sa distance au foyer, etc., nous aurons les trois équations

$$\pm\delta=m\beta+n\alpha+p,$$
$$\pm\delta'=m\beta'+n\alpha'+p,$$
$$\pm\delta''=m\beta''+n\alpha''+p.$$

Prenons d'abord les signes supérieurs, nous aurons facilement m, n et p, sous la forme

$$A\delta+B\delta'+C\delta''\ldots.$$

Si nous prenons les doubles signes pour δ' et δ'' seulement, nous aurons quatre systèmes de valeurs pour m, n, p. Quant à prendre le double signe pour δ, cela reviendrait à changer à la fois les signes de m, de n et de p, ce qui donne les mêmes directrices et par suite les quatre mêmes courbes.

Lemme I. *Étant donnés deux points* A *et* B, *trouver le lieu du point* M *tel, que l'angle* AMB *soit droit.*

Prenons pour origine le point milieu de l'arc AB, appelons $2a$ la distance AB que je supposerai moindre qu'un quadrant, z la latitude de m et x sa longitude ou son abscisse, nous avons par une propriété connue du triangle rectangle

$$\sin^2 z=\operatorname{tang}(a+x).\operatorname{tang}(a-x).$$

C'est l'équation du lieu, mais il faut quelques transformations pour reconnaître la nature de la courbe. On a d'abord

$$\sin^2 z=\frac{\operatorname{tang}^2 a-\operatorname{tang}^2 x}{1-t^2 a\operatorname{tang}^2 x};$$

de là

$$\text{tang}^2 z\,(1 - \text{tang}^2 a) + \sin^2 x = \cos^2 x\,\text{tang}^2 a;$$

si nous projetons l'arc z sur l'axe des y et que nous appelions Y la tangente de la projection, nous trouverons,

$$\frac{\text{tang}^2 y}{\left(\frac{\sin^2 a}{\cos 2a}\right)} + \frac{X^2}{\text{tang}^2 a} = 1,$$

ou, plus simplement,

$$\frac{Y^2}{\beta^2} + \frac{X^2}{\alpha^2} = 1,$$

en posant

$$\frac{\sin^2 a}{\cos 2a} = \beta^2, \quad \text{et} \quad \text{tang}\, a = \alpha.$$

C'est donc une ellipse sphérique; les foyers se trouvent sur l'axe des y.

Remarque. Si on prend pour origine le point A, on arrive plus simplement encore au résultat qui est

$$x^2 + y^2 - Ax = 0.$$

A exprime la tangente de l'arc donné AB.

Lemme II. *Étant donnés deux points* A *et* B, *trouver le lieu du point* m *tel, que les sinus des distances de* m *à* A *et à* B *soient dans un rapport donné.*

Ce problème, comme dans la géométrie plane, se ramène au précédent. Le lieu est donc une ellipse sphérique.

Problème. *Étant donnés la directrice d'une conique sphérique et deux points* A, B, *trouver le lieu du foyer.*

Ce problème se ramène facilement à trouver le lieu des points tels, que les sinus de leurs distances aux points donnés soient comme les sinus des distances de chaque point à la directrice. Le lieu est donc une ellipse dont l'axe est dirigé suivant l'arc AB; une extrémité de cet axe est à la rencontre C de l'arc AB prolongé jusqu'à la directrice. On peut trouver l'autre extrémité par la construction suivante : Abaissez des points A, B les arcs AA', BB' perpendiculaires à la directrice; soit O leur rencontre; joignez le point O à la rencontre des diagonales du quadrilatère ABA'B' par un arc coupant AB en un point D; les quatre points C, A, D, B sont harmoniques; donc on a

$$\frac{\sin AD}{\sin BD} = \frac{\sin AC}{\sin BC} = \frac{\sin AA'}{\sin BB'}.$$

Donc le point D est un point du lieu demandé; il en est de même de sa projection D' sur la directrice. On pourra trouver le second axe géométriquement au moyen de cette propriété évidente du cercle principal : les tangentes des ordonnées de deux points correspondants dans la courbe et le cercle principal sont comme les tangentes des deux demi-axes de la courbe.

Problème. *Etant donnés la directrice et trois points, construire la courbe.*

Ce problème, d'après ce qui précède, se ramènera à construire deux ellipses dont l'intersection donnera le foyer. Si l'on voulait le résoudre par l'analyse, on pourrait prendre la directrice pour axe des y, et l'équation de la courbe serait

$$n^2 x^2 = (y - y')^2 + (x - x')^2 + (yx' - y'x)^2,$$

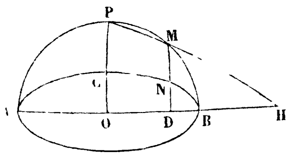
x', y' désignant les tangentes des coordonnées du foyer. Les coordonnées des trois points devant vérifier cette équation, on serait conduit à résoudre trois équations à trois inconnues, n s'élimine immédiatement, et il reste deux équations du second degré entre x' et y' dont chacune représente une des ellipses ci-dessus indiquées.

Propriétés de l'ellipse rapportée à ses axes. On a vu qu'elle avait pour équation

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Si sur AB comme diamètre on décrit un cercle qu'on appel-

Fig. 1.



lera *cercle principal*, on aura, entre les ordonnées Y et y de ce cercle et de l'ellipse correspondantes à une même abscisse, la relation

$$\frac{Y}{y} = \frac{a}{b}.$$

Cette relation a également lieu pour les arcs latitudes des deux points ou leurs projections sur l'axe des y. De là résulte un moyen de construire l'ellipse par points quand on connait ses axes. On mènera par un point M quelconque du cercle principal l'ordonnée MD ; on joindra P et M par un arc de grand cercle qu'on prolongera jusqu'à la rencontre de l'axe AB en H ; on joindra CH par un arc qui coupera l'ordonnée MD en un point N. Ce point appartiendra à la courbe.

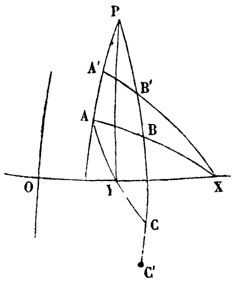
Si l'on joint deux points M, N de l'ellipse par un arc de grand cercle et les points correspondants du cercle principal par un second arc M′, N′, ces deux arcs viendront couper l'axe commun au même point. Si les deux points M et N sont supposés infiniment voisins, on aura le corollaire suivant :

Deux tangentes menées l'une à l'ellipse, l'autre au cercle principal en des points correspondants coupent l'axe commun au même point. Ce qui donne un moyen géométrique de faire passer par un point quelconque une tangente à une ellipse sphérique, et aussi de mener une tangente commune à deux ellipses ayant leurs axes a, a' sur un même cercle, et les tangentes des quatre axes étant données en proportion.

Problème. *Étant donnés les directions des axes d'une ellipse et deux points, trouver la grandeur des axes.*

Soient A et B les points donnés, A′ et B′ les points cor-

Fig. 2.



respondants du cercle principal supposé connu, C et C′ les points symétriques de B et B′, X la rencontre de l'arc AB avec l'axe OX, Y la rencontre du même axe avec l'arc AC ou avec A′C′, enfin P la rencontre des arcs A′A et B′B. D'après un théorème démontré plus haut sur les sécantes menées d'un même point X, l'arc PY sera la polaire de X. Soit T le point où cette polaire coupe le cercle, le triangle OTX sera rectangle et donnera

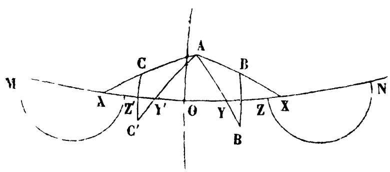
$$\operatorname{tang} OX . \operatorname{tang} OY = \operatorname{tang}^2 . OT = \operatorname{tang}^2 a$$

(a étant le demi-axe sur OX). On construira donc a en se servant du théorème sur la sécante et la tangente au cercle menées d'un même point. L'autre axe se trouve de même.

Problème. *On donne un des axes d'une ellipse en direction et trois points, trouver le centre et les axes en grandeur.*

Soient A, B, C les points donnés, MN la direction de l'axe a inconnu, et O le centre supposé connu; soit en-

Fig. 3.



core B′ le symétrique de B; prolongez les arcs AB et AC jusqu'à la rencontre de l'axe aux points X, X′. On aura, d'après le problème précédent,

$$\operatorname{tang}^2 a = \operatorname{tang} OX . \operatorname{tang} OY.$$

Opérant de même sur les points A et C, nous aurons

$$\operatorname{tang}^2 a = \operatorname{tang} OX' . \operatorname{tang} OY'.$$

Si nous prenons

$$OZ = 2OY, \quad ON = 2OX, \quad OZ' = 2OY', \quad OM = 2OX',$$

et que sur ZN pris pour arc nous décrivions un cercle et un autre sur mZ', il suffira de construire l'axe radical de ces deux cercles, et son intersection avec MN donnera le centre. La tangente menée de ce point à l'un des cercles fera connaître le demi-axe a.

Théorème. *Dans une ellipse, les tangentes carrées des latitudes de deux points sont comme les produits des sinus des segments déterminés sur l'axe par les ordonnées des deux points.*

Si dans l'équation de l'ellipse nous remplaçons l'ordonnée géométrique par la latitude, il faudra au lieu de y mettre $\frac{Y}{\cos X}$, ce qui transforme l'équation et donne

$$\frac{Y^2}{b^2}+\frac{\sin^2 x}{\sin^2 \alpha}=1,$$

de là

$$\frac{Y^2}{Y_1^2}=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2 x}{\sin^2\alpha-\sin^2 x'}=\frac{\sin(\alpha+x)\sin(\alpha-x)}{\sin(\alpha+x')\sin(\alpha-x')}.$$

Diamètres dans l'ellipse sphérique.

Si par un point A situé à 90 degrés du centre on mène un arc sécant aux points B et C, qu'on détermine le centre sphérique des moyennes distances des points B et C, c'est-à-dire un point tel, qu'on ait

$$\operatorname{tang} X=\frac{\operatorname{tang} x'+\operatorname{tang} x''}{2},\ldots,$$

le lieu de ce centre sera une circonférence de grand cercle passant au centre : on la nomme *diamètre relatif* aux cordes partant de A. En effet, appelons A la tangente de la latitude de A, l'équation de toute circonférence passant par le point donné sera

$$y=Ax+b.$$

Combinons cette équation avec celle de la courbe et prenons la demi-somme des racines, puis éliminons 6; nous aurons comme sur un plan

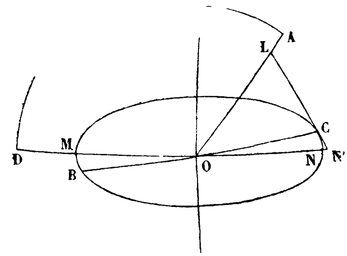
$$y=-\frac{b^2}{a^2 A}x,$$

ce qu'on avait énoncé. Soit A' le coefficient de cette circonférence, nous aurons

$$AA'=-\frac{b^2}{a^2}.$$

On voit d'après cette relation que si l'on prend sur le diamètre MN une longueur OD $= \frac{\pi}{2}$, les cordes menées du point D auront pour diamètre OA. Ainsi les deux

Fig. 4.



cercles OA et OD sont tels, que chacun est le diamètre des cordes concourant avec l'autre à 90 degrés du centre. On les nomme *diamètres conjugués*. Si l'on joint A aux points M et N, on a évidemment deux tangentes, en sorte que la polaire d'un point A à 90 degrés du centre n'est autre que le diamètre des cordes menées de ce point. Si par le point C, extrémité de l'axe, on lui mène un arc perpendiculaire prolongé jusqu'à la rencontre de deux diamètres conjugués, puis qu'on projette les arcs CL, CN$'$ sur l'autre axe, on aura, en nommant p et p' les tangentes en valeur absolue de ces projections,

$$pp' = b_1^2;$$

quant aux axes eux-mêmes, on aura

$$\text{tang}\, CL \,.\, \text{tang}\, CN' = b^2 \cos^2 a.$$

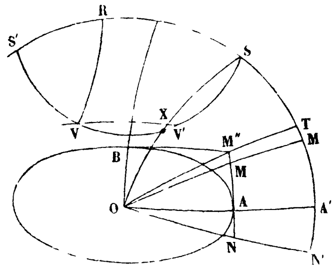
Applications. Étant donné un diamètre ON, construire géométriquement son conjugué.

On y parvient aisément à l'aide du théorème sur les sécantes au cercle menées d'un même point.

Application. *Étant donnés les axes d'une ellipse, construire deux diamètres conjugués qui fassent entre eux un angle* α ($\alpha < 90$ *degrés*).

Supposons le problème résolu, et soient OM, ON les deux diamètres demandés et OA l'axe; prolongeons ces

Fig. 5.



trois arcs jusqu'à leur rencontre en M', N', A' avec un grand cercle ayant O pour pôle; l'arc $M'N'$ sera égal à α, et l'on aura

$$\operatorname{tang} A'M' . \operatorname{tang} A'N' = \frac{\operatorname{tang} AM . \operatorname{tang} AN}{\sin^2 a} = \frac{b^2}{a^2},$$

a et b représentant les tangentes des demi-axes. Si donc on élève aux points A et B, extrémités des axes, deux arcs perpendiculaires se coupant en M'', qu'on prolonge l'arc M'' jusqu'en T, on aura

$$\operatorname{tang} A'T = \frac{b}{a};$$

donc on a

$$\operatorname{tang} A'M' . \operatorname{tang} A'N' = \operatorname{tang}^2 A'T.$$

Le problème est donc ramené à diviser un arc $M'N'$ en deux segments tels, que le produit de leurs tangentes égale $\operatorname{tang}^2 A'T$. Pour cela, je prends

$$A'S = 2A'T \quad \text{et} \quad SS' = 2\alpha;$$

sur SS′ comme arc diamétral je décris un cercle, et de O comme pôle un autre cercle avec OS — A′S comme distance polaire; je suppose que les deux cercles se coupent en V, V′; je projette V sur SS′ et j'ai

$$\tang\frac{RS'}{2}\tang\frac{RS}{2}=\tang^2\frac{RV}{2}=\tang^2\frac{SA'}{2}=\frac{b^2}{a^2};$$

or

$$\frac{RS}{2}+\frac{RS'}{2}=\alpha;$$

donc il suffit pour achever la construction de prendre A′M′ et A′N′ égaux aux arcs $\frac{RS}{2}$, $\frac{RS'}{2}$, et de prendre O aux points M′, N′ ainsi obtenus.

Discussion. Pour que les cercles se coupent, il faut qu'on ait

$$A'S<\alpha,$$

ou

$$\tang^2 A'T<\tang\alpha,$$

ou

$$\tang\alpha>\frac{2ab}{a^2-b^2},$$

ce qui donne le minimum de l'angle aigu formé par deux diamètres conjugués. Quand on prend pour α sa valeur minimum, il résulte de la construction que les deux diamètres sont également inclinés sur l'axe, et par conséquent sont égaux; ils sont représentés par OM″T et sont symétriques par rapport à l'axe de la courbe.