Nouvelles annales de mathématiques

# E. Laquière

# Observations rectificatives sur le cercle coupant orthogonalement trois autres cercles

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 17 (1858), p. 238-240

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__238_1>

## OBSERVATIONS RECTIFICATIVES
### Sur le cercle coupant orthogonalement trois autres cercles ;

PAR M. E. LAQUIÈRE,
Élève du lycée Saint-Louis.

1°. Le cercle qui coupe orthogonalement trois autres cercles jouit d'une double propriété. Les trois polaires de chaque point de la circonférence par rapport aux trois cercles se coupent en un même point, et ce point d'intersection est encore sur le cercle; cette dernière propriété est une conséquence d'une évidence géométrique et subsiste même pour trois coniques quelconques, lorsque le lieu du point est une ligne du troisième degré. Or, au t. V, p. 121, 1846, on lit que le lieu du point d'intersection est du quatrième degré, ce qui est erroné. L'analyse mène à une équation du second degré; en effet, on lit en cet endroit que les équations des trois cercles, rapportées au centre radical comme origine des coordonnées, sont

$$x^2 + y^2 - 2\alpha\, x + 2\beta\, y + \gamma^2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2\alpha' x + 2\beta' y + \gamma^2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2\alpha'' x + 2\beta'' y + \gamma^2 = 0,$$

ce qui est très-juste. Les équations des trois polaires du point $x$, $y$ sont donc

$$
\begin{aligned}
(x-\alpha\ )\mathrm{X}+(y-\beta\ )\mathrm{Y}&=\alpha\ x+\beta\ y+\gamma^2,\\
(x-\alpha')\mathrm{X}+(y-\beta')\mathrm{Y}&=\alpha' x+\beta' y+\gamma^2,\\
(x-\alpha'')\mathrm{X}+(y-\beta'')\mathrm{Y}&=\alpha'' x+\beta'' y+\gamma^2,
\end{aligned}
$$

où X, Y sont les coordonnées courantes. De là on déduit

$$
\begin{aligned}
(\alpha-\alpha')\mathrm{X}+(\beta-\beta')\mathrm{Y}&=(\alpha'-\alpha)x+(\beta'-\beta)y,\\
(\alpha-\alpha'')\mathrm{X}+(\beta-\beta'')\mathrm{Y}&=(\alpha''-\alpha)x+(\beta''-\beta)y,
\end{aligned}
$$

d'où évidemment

$$\mathrm{X}=-x,\quad \mathrm{Y}=-y.$$

Substituant dans l'une quelconque des trois dernières équations, on trouve

$$x^2+y^2-\gamma^2=0,$$

équation du cercle.

*Note du Rédacteur*. La correction de M. Laquière est très-juste. Une inadvertance et une faute de calcul m'ont fait parvenir à une équation du quatrième degré (*voir* t. XVI, p. 268). La proposition a été primitivement démontrée par J.-B. Durrande. Elle est ainsi formulée :

La circonférence du cercle décrit du centre radical de trois cercles comme centre et avec un rayon égal à la tangente menée de ce centre à l'un d'eux, est à la fois le lieu géométrique des points du plan des trois cercles dont les polaires relatives à ces trois cercles concourent en un même point et le lieu géométrique du point de concours des trois polaires, et ces deux points sont constamment aux extrémités d'un même diamètre de ce cercle (*Annales* de Gergonne, t. XVI, p. 112; 1825).

Ce théorème est suivi d'un autre analogue pour quatre sphères. En général, lorsque dans un système d'équations entre des coordonnées courantes et des coordonnées fixes, il y a symétrie entre les unes et les autres, le résultat de l'élimination reste le même en rendant fixes les coordonnées courantes et rendant courantes les coordonnées fixes : c'est ce qui a lieu pour les équations des trois lignes polaires ci-dessus, et aussi pour les équations des quatre plans polaires avec des sphères.