C. SOUILLART
ÉMILE MATHIEU

Solution de la question 405

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 192-194
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__192_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 405

(voir t. XVI, p. 401);

PAR M. C. SOUILLART,
Ancien élève de l'École Normale,
ET M. ÉMILE MATHIEU,
Professeur.

Étant donnée l'équation

$$(x^3+y^3+z^3-3xyz)(x'^3+y'^3+z'^3-3x'y'z')$$
$$=X^3+Y^3+Z^3-3XYZ,$$

trouver les valeurs de X, Y, Z en fonction de x, y, z, x', y', z'.

Le polynôme $x^3+y^3+z^3-3xyz$ peut être mis sous la forme d'un déterminant.

On a

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=-\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

de même

$$x'^3+y'^3+z'^3-3x'y'z'=-\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ y' & z' & x' \\ z' & x' & y' \end{vmatrix}.$$

On aura donc

$$(x^3+y^3+z^3-3xyz)(x'^3+y'^3+z'^3-3x'y'z')$$
$$=\begin{vmatrix} xx'+yy'+zz' & xy'+yz'+zx' & xz'+yx'+zy' \\ yx'+zy'+xz' & yy'+zz'+xx' & yz'+zx'+xy' \\ zx'+xy'+yz' & zy'+xz'+yx' & zz'+xx'+yy' \end{vmatrix}$$

Si l'on pose

$$X = xx' + yy' + zz',$$
$$Y = xy' + yz' + zx',$$
$$Z = xz' + yx' + zy' \ (*),$$

le déterminant-produit devient

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \\ Y & Z & X \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ Y & Z & X \\ Z & X & Y \end{vmatrix} = X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ.$$

Les valeurs précédentes de X, Y, Z répondent donc à la question.

La formule

$$(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)(x'^3 + y'^3 + z'^3 - 3x'y'z')$$
$$= X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ,$$

dans laquelle

$$X = xx' + yy' + zz',$$
$$Y = xy' + yz' + zx',$$
$$Z = xz' + yx' + zy',$$

est un cas particulier de la formule

$$\begin{vmatrix} x & y & z & u & v \ldots & r & s & t \\ y & z & u & v \ldots & & s & t & x \\ z & u & v \ldots & & & t & x & y \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t & x & y & z \ldots & & & r & s \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x' & y' & z' & u' \ldots & r' & s' & t' \\ y' & z' & u' \ldots & & s' & t' & x' \\ z' & u' & v' \ldots & & t' & x' & y' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t' & x' & y' & z' \ldots & & r' & s' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} X & Y & Z & U \ldots & R & S & T \\ Y & Z & U & V \ldots & S & T & X \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ T & X & Y & Z \ldots & & R & S \end{vmatrix}$$

(*) Ce résultat est énoncé dans l'*Algèbre* de M. Bertrand, 2e édition.

dans laquelle on pose

$$\begin{aligned}
X &= xt' + ys' + zr' + \ldots + sy' + tx',\\
Y &= xx' + yt' + zs' + \ldots + sz' + ty',\\
Z &= xy' + yx' + zt' + \ldots + sx' + tr',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Par exemple, si les déterminants sont du quatrième ordre, on a

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{l} -x^4 + y^4 - z^4 + u^4 - 4y^2xz - 4xu^2z \\ + 4x^2yu + 4yuz^2 + 2x^2z^2 - 2u^2y^2 \end{array}\right)\\
&\times\left(\begin{array}{l} -x'^4 + y'^4 - z'^4 + u'^4 - 4y'^2x'z' - 4x'u'^2z' \\ + 4x'^2y'u' + 4y'u'z'^2 + 2x'^2z'^2 - 2u'^2y'^2 \end{array}\right)\\
&= -X^4 + Y^4 - Z^4 + U^4 - 4Y^2XZ - 4XU^2Z\\
&\quad + 4X^2YU + 4YUZ^2 + 2X^2Z - 2U^2Y^2,
\end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned}
X &= xu' + yz' + zy' + ux',\\
Y &= xx' + yu' + zz' + uy',\\
Z &= xy' + yx' + zu' + u'z',\\
U &= xz' + yy' + zx' + uu'.
\end{aligned}$$