BERGIS

Solution analytique de la question 413

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 180-182

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__180_1>

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION 413

(voir p. 179);

PAR M. BERGIS,

Élève du lycée Charlemagne (institution Massin).

Soit l'équation de la conique

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos a},$$

et

$$\rho = \frac{-p}{e\cos a}.$$

celle de la directrice correspondante au foyer pris pour pôle.

Soient r', α' les coordonnées du point A_1; r'', α'' celles de A_2; ρ', ω' celles du point variable M.

D'après une formule connue, l'équation de MA_1 sera

$$\rho = \frac{\rho' r' \sin(\omega' - \alpha')}{r'\sin(\omega - \alpha') - \rho'\sin(\omega - \omega')}$$

ou

$$\rho = \frac{\rho' r' \sin(\omega' - \alpha')}{(r'\cos\alpha' - \rho'\cos\omega')\sin\alpha + (\rho'\sin\omega' - r'\sin\alpha')\cos\alpha}.$$

La coordonnée angulaire du point d'intersection P de cette droite avec la directrice sera donnée par la formule

$$\operatorname{tang} \omega_1 = -\frac{e\rho' r' \sin(\omega' - \alpha') + (\rho' \sin\omega' - r' \sin\alpha')\rho}{(r' \cos\alpha' - \rho' \cos\omega')\rho},$$

ou bien, en exprimant que les points A_1, A_2, M sont sur la conique, on a, réductions faites,

$$\operatorname{tang} \omega_1 = \frac{\sin\alpha' - \sin\omega'}{\cos\alpha' - \cos\omega'}$$

ou

$$\operatorname{tang} \omega_1 = -\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha' + \omega')}.$$

De même MA_2 coupera D en un point Q dont la coordonnée angulaire sera donnée par

$$\operatorname{tang} \omega_2 = -\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha'' + \omega'')}.$$

L'angle sous lequel la distance PQ est vue du foyer F est la différence des angles ω_1 et ω_2. La tangente de cet angle sera donc donnée par

$$\frac{\dfrac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha'' + \omega')} - \dfrac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha' + \omega')}}{1 + \dfrac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha'' + \omega')\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha' + \omega')}}$$

ou

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha'')}{\sin\frac{1}{2}(\alpha' + \omega')\sin\frac{1}{2}(\alpha'' + \omega') + \cos\frac{1}{2}(\alpha' + \omega')\cos\frac{1}{2}(\alpha'' + \omega')},$$

ou enfin

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha' - \omega''),$$

quantité constante.

Le théorème est donc démontré.

Note du Rédacteur. M. Richard Oxamendi considère les polaires des points P et Q, elles passent par F et sont respectivement perpendiculaires à PF et QF ; les droites PF, la perpendiculaire à PF en F, les droites FA, FM forment un faisceau harmonique : un angle étant droit dans ce faisceau, l'autre est bissecté, etc.