NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MARQUET

DALICAN

Problème. Trouver le lieu géométrique des centres des sections faites dans un cône du second ordre par une suite de plans passant tous ou par un même point ou par une même droite

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 172-176

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__172_1>

PROBLÈME.

Trouver le lieu géométrique des centres des sections faites dans un cône du second ordre par une suite de plans passant tous ou par un même point ou par une même droite;

PAR MM. MARQUET ET DALICAN,
Candidats à l'École Normale supérieure.

PREMIÈRE PARTIE.

Voici la méthode générale qu'il faut suivre dans le premier cas :

Soient

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface du deuxième degré;

$$M = 0$$

l'équation générale du plan passant par le point donné; cette équation renferme deux paramètres arbitraires. Entre ces deux équations, on éliminera une des trois variables, z par exemple, on aura ainsi une équation entre x et y,

$$f(x, y) = 0,$$

équation de la projection de la courbe d'intersection sur le plan. Les coordonnées du centre de cette courbe seront déterminées par les équations

$$f'_x(x, y,) = 0,$$
$$f'_y(x, y,) = 0,$$

entre ces deux dernières équations et l'équation

$$M = 0,$$

on éliminera les deux paramètres arbitraires, et on aura une seule équation en x, y et z qui sera celle du lieu cherché. On voit donc de suite que le lieu cherché est une surface.

Appliquons cette méthode au cône.

Supposons, pour plus de simplicité, que le sommet du cône soit à l'origine, et que son équation soit

$$(1) \qquad Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = 0.$$

Il faut au moins qu'un des trois coefficients soit négatif.

Soient (x', y', z') les coordonnées du point donné; l'équation générale du plan sécant est

$$(2) \qquad a(x - x') + b(y - y') - (z - z') = 0.$$

Portant la valeur de z dans l'équation (1), on obtient l'équation

$$\left.\begin{array}{l} (P - a^2P'')x^2 + (P' - b^2P'')y^2 - 2ab\,P''xy \\ + 2P''(ax' + by' + z')ax + 2P''(ax' + by' + z')by \\ - P''(ax' + by' + z')^2 \end{array}\right\} = 0,$$

qui, jointe à l'équation (2), représente la courbe d'intersection. Les équations qui déterminent le centre sont

$$(3) \qquad a^2(x - x') - ab(y - y') + az' + \frac{P}{P''}x = 0,$$

$$(4) \qquad b^2(y - y') - ab(x - x') + bz' + \frac{P'}{P''}y = 0.$$

Eliminant a et b entre les trois équations (2), (3), (4), on obtient

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 - Px'x - P'y'y + P''z'z = 0.$$

Le lieu cherché est donc une surface du second degré

Les coordonnées du centre sont

$$x = \frac{x'}{2}, \quad y = \frac{y'}{2}, \quad z = \frac{z'}{2},$$

ce qui indique que ce point est le milieu de la droite qui joint le point donné au sommet du cône.

Si l'on prend le centre pour origine, on obtient

$$4(Px^2 + P'y^2 - P''z^2) = Px'^2 + P'y'^2 - P''z'^2,$$

l'on a un hyperboloïde à une nappe ou à deux nappes selon que le second membre est positif ou négatif; l'hyperboloïde et le cône ont un élément rectiligne commun et passant par le centre.

SECONDE PARTIE.

Dans le cas où le plan sécant passe par une droite donnée, la méthode générale est la suivante :

Soient

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface du deuxième degré;

$$x = az + p,$$
$$y = bz + q$$

les équations de la droite donnée; l'équation générale des plans passant par cette droite est

$$x - az - p = \lambda(y - bz - q).$$

Entre cette équation et celle de la surface, on éliminera une des variables, x par exemple, on aura une équation

$$f(y, z) = 0$$

qui représentera, conjointement avec l'équation du plan, la courbe d'intersection. Entre les équations

$$f'_y(y, z) = 0,$$
$$f'_z(y, z) = 0$$

du centre de la courbe et l'équation du plan, on éliminera l'indéterminée λ, on aura un système de deux équations en x, y, z qui seront les équations du lieu; donc le lieu sera une courbe.

Application au cône.

Soit donc

$$(1) \qquad Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = 0$$

l'équation du cône. Eliminant x entre cette question et celle du plan variable, il vient

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (az+p)^2+\lambda^2(y-bz-q)^2+2\lambda(az+p)(y-bz-q) \\ \qquad + \frac{P'}{P}y^2 - \frac{P''}{P}z^2 \end{array} \right\} = 0.$$

Les coordonnées du centre sont données par les équations

$$(3) \qquad \lambda^2(y - bz - q) + \lambda(az + p) + \frac{P'}{P}y = 0,$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda^2 b(y - bz - q) - \lambda[a(y - bz - q) - b(az + p)] \\ \qquad\qquad - a(az + p) + \frac{P''}{P}z = 0; \end{array} \right.$$

d'où l'on tire

$$(5) \quad \lambda a(y - bz - q) + a(az + p) + \frac{P'}{P}by - \frac{P''}{P}z = 0.$$

Eliminant successivement λ entre l'équation du plan variable et l'équation (5), on obtient

$$(6) \qquad (x - az - p)x + \frac{P'}{P}(y - bz - q)y = 0,$$

$$(7) \qquad aPx + bP'y - P''z = 0.$$

Ce sont les équations de l'intersection d'une surface du second ordre par un plan; ainsi le lieu cherché est une conique plane.

Remarque. Il resterait maintenant, pour compléter la question, à examiner ce que devient le lieu dans les cas particuliers où la droite passerait par le sommet du cône, serait une génératrice, etc., mais l'étude de ces cas particuliers n'offre rien de remarquable.

Note du Rédacteur. La théorie des polaires réciproques (principe de dualité) donne ce théorème :

Soient donnés : 1° un cône du second degré; 2° un point fixe; 3° un plan fixe. Par le point on mène un plan quelconque qui coupe le cône suivant une conique, et le plan fixe suivant une droite; le lieu du pôle de cette droite relativement à la conique est un hyperboloïde dont le centre est dans le plan fixe.

Les deux propriétés énoncées ci-dessus pour le cône subsistent pour une surface quelconque du second degré; c'est d'une évidence intuitive pour la sphère; et par les procédés métamorphiques on passe de la sphère aux autres surfaces; toutefois une démonstration générale directe est à désirer.

Lorsque la droite se transporte à l'infini, on a des sections parallèles. Cette propriété est dans tous les traités élémentaires.