NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. VIELLARD
LAQUIÈRE
L. DE COINCY

Solution de la question 392 (Prouhet)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 156-158

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__156_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 392 (PROUHET)

(voir t. XVI, p. 311);

PAR MM. H. VIELLARD ET M. LAQUIÈRE,
Élèves du lycée Saint-Louis (classe de M. Faurie),

ET M. L. DE COINCY,
Élève du lycée Bonaparte.

Soit $2m$ le degré de l'équation.

Le polynôme $f(x)$ étant un produit de facteurs du second degré de la forme

$$[(x-a)(x-2s+a)],$$

sa dérivée sera la somme de produits de facteurs du second degré de cette forme, produits multipliés respectivement par la dérivée de celui de ces facteurs du second degré qui n'entre pas dans le produit.

Cette dérivée étant pour tous les facteurs

$$2(x-s),$$

on aura

$$(a) \qquad f'(x) = 2(x-s)\mathrm{F}(x),$$

$\mathrm{F}(x)$ étant la somme de tous les produits $(m-1)$ à $(m-1)$ des facteurs du second degré de la forme ci-dessus qui entrent dans le polynôme $f(x)$.

1°. De (a) résulte d'abord que s est racine de

$$f'(x) = 0.$$

2°. Les facteurs de la forme énoncée

$$[(x-a)(x-2s+a)]$$

donnent le même résultat par la substitution de h ou de

$2s - k$ à la place de x, puisque ce résultat est

$$u = (k - a)(k - 2s + a),$$

ou bien

$$v = (2s - k - a)(a - k) = u.$$

Ainsi le polynôme $F(x)$ donnera les mêmes résultats par ces deux substitutions. Si donc k est racine de $f'(x) = 0$ et, par conséquent, de $F(x) = 0$, $2s - k$ le sera aussi.

3°. La dérivée $f'(x)$ est de degré $(2m - 1)$, et l'on a

$$\frac{1}{2} f'(x) = (x - s)\, F(x) = \varphi(x),$$

$F(x)$ étant un polynôme de même forme que $f(x)$, c'est-à-dire qu'il est un produit de $m - 1$ facteurs de la forme

$$[(x - a')(x - 2s + a')].$$

Le polynôme $\varphi(x)$ est donc un polynôme de degré impair ayant une racine égale à s et dont les autres racines se partagent en couples de somme commune $2s$. Cela posé,

$$\varphi'(x) = Fx + (x - s)\, F'(x).$$

Or, d'après la démonstration ci-dessus,

$$F'(x) = 2(x - s)\, F_2(x),$$

$F_2(x)$ étant d'après la démonstration précédente de la forme $F(x)$, c'est-à-dire produit de facteurs du second degré en nombre $2(m - 2)$ et de la forme

$$[(x - b)(x - 2s + b)].$$

Or

$$\varphi'(x) = F(x) + 2(x - s)(x - s)\, F_2(x).$$

En appliquant encore à $\varphi'(x)$ la même démonstration que ci-dessus à $F(x)$, on prouverait que si $\varphi'(x)$ a la racine l, il a aussi la racine $2s - l$. C. Q. F. D.

Ainsi

$$(\alpha) \qquad f(x),\ f''(x),\ldots,\ f^{2n}(x),$$

sont de même forme

$$(\beta) \qquad f'(x),\ f'''(x),\ldots,\ f^{2n+1}(x)$$

ont la racine s.

Les autres racines des polynômes (β) et celles des polynômes (α) se partagent en groupes de somme $2s$ (*).