NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. RASSICOD

Solution de la question 421 (Hermite)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 126-130

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__126_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 421 (HERMITE)

(voir p. 31),

PAR M. L. RASSICOD,
Élève du lycée Saint-Louis.

Pour que l'équation

$$(1) \qquad ax + by = n,$$

où a, b, n sont des nombres entiers positifs, admette des solutions entières et positives, il faut :

1°. Que a et b soient premiers entre eux (*);

2°. Que n soit plus grand que a et b. Car pour que les valeurs de x et de y

$$x = \frac{n - by}{a}, \quad y = \frac{n - ax}{b}$$

tirées de l'équation (1) soient positives, il faut que y soit $< \frac{n}{b}$ et $x < \frac{n}{a}$; mais x et y devant être entiers ne sauraient être plus petits qu'une fraction; donc il faut que n soit $> a$ et $> b$.

Si ces conditions sont réalisées, l'équation donnée admettra toujours un système de valeurs ($x = \mathrm{A}$, $y = \mathrm{B}$) entières et positives qui la vérifieront. Toutes les solutions seront d'ailleurs comprises dans ces formules

$$x = a - bq, \quad y = \mathrm{B} + aq \ (^{**}).$$

Pour que ces valeurs soient positives, il faut que l'on ait

$$\frac{-\mathrm{B}}{a} < q < \frac{\mathrm{A}}{b},$$

(*) BERTRAND, *Analyse indéterminée du premier degré.*

(**) BERTRAND, *Analyse indéterminée du premier degré.*

c'est-à dire, en vertu de l'identité $aA + bB = n$,

$$(2) \qquad \frac{-B}{a} < q < \frac{-B}{a} + \frac{n}{ab}.$$

Si donc on désigne par p le nombre des entiers contenus dans $\frac{n}{ab}$, les $p + 1$ valeurs

$$0, \ 1, \ 2, \ldots, \ p$$

que l'on donnera à q satisferont à l'inégalité (2), et, par conséquent, donneront pour l'équation (1) $p + 1$ solutions [dont fera partie la solution (A, B) donnée pour $q = 0$] évidemment distinctes et de plus entières et positives. Toute autre valeur attribuée à q ne satifaisant pas à l'inégalité (2) ne pourra donner pour l'équation proposée un système de solutions entières et positives.

Le nombre de ces solutions est donc en général marqué par le plus grand nombre d'entiers contenu dans $\frac{n}{ab}$ plus un. Je dis en général, car si n était $< a$ et $< b$, il n'y aurait pas de solution entière et positive, c'est-à-dire que le nombre de ces solutions serait précisément égal à p qui serait alors nul.

Note du Rédacteur. Ce résultat est aussi consigné dans l'*Algèbre* de MM. Mayer et Choquet; dans le *Quarterly Journal* (mars, 1855, p. 370), M. Hermite donne cette nouvelle démonstration :

Désignons par $E\left(\frac{n}{p}\right)$ le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{n}{p}$.

On doit évidemment avoir

$$x = E\left(\frac{n}{a}\right) - x', \quad y = E\left(\frac{n}{b}\right) - y',$$

où x' et y' sont des entiers positifs; substituant ces valeurs, on obtient

$$ax' + by' = n - \alpha - \beta = n',$$

où

$$\alpha = n - a\mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right),$$

$$\beta = n - b\mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right).$$

On a

$$\alpha < a \quad \text{et} \quad \beta < b$$

et

$$\alpha + \beta < n, \quad n' < 0, \quad n' < n, \quad n' > a, \quad n' > b.$$

Ces inégalités doivent subsister pour qu'une solution soit possible. Faisant donc

$$x' = \left(\frac{\mathrm{E}}{n'}\right) - x'', \quad y' = \left(\frac{\mathrm{E}}{n'}\right) - y'',$$

on obtient

$$ax'' + by'' = n' - \alpha' - \beta' = n'',$$

où

$$\alpha' = n' - a\mathrm{E}\left(\frac{n'}{a}\right),$$

$$\beta' = n' - b\mathrm{E}\left(\frac{n'}{a}\right);$$

et les inégalités analogues à celles de ci-dessus.

Répétant les mêmes opérations, on a, pour l'équation de quantième i,

$$x^{i} = \left(\frac{\mathrm{E}}{n^{i}}\right) - x^{i+1}, \quad y^{i} = \left(\frac{\mathrm{E}}{n^{i}}\right) - y^{i+1},$$

$$n^{i} - a\mathrm{E}\left(\frac{n^{i}}{a}\right) = \alpha^{i}, \quad n^{i} - b\mathrm{E}\left(\frac{n^{i}}{a}\right) = b^{i},$$

$$n^{i} - \alpha^{i} - \beta^{i} = n^{i+1},$$

et de là

$$ax^{i+1} + by^{i+1} = n^{i+1}.$$

Les n diminuant, le nombre des transformations est limité et elles s'arrêtent lorsqu'on a

$$n^{\iota} = n^{\iota+1} \quad \text{ou} \quad \alpha^{\iota} + \beta^{\iota} = 0\,;$$

ce qui donne

$$\alpha^{\iota} = 0, \quad \beta^{\iota} = 0,$$

$$n^{\iota} = a\,\mathrm{E}\left(\frac{n^{\iota}}{a}\right) = b\,\mathrm{E}\left(\frac{n^{\iota}}{b}\right).$$

Mais a et b étant premiers entre eux, on a donc

$$n^{\iota} = \omega ab,$$

ω est un nombre entier; ainsi on obtient une transformée

$$ax^{\iota} + by^{\iota} = \omega ab,$$

d'où

$$x^{\iota} = b\xi, \quad y^{\iota} = a\eta, \quad \omega = \eta + \xi\,;$$

le nombre des solutions de cette dernière équation est $\omega + 1$.

Faisons

$$n = \pi ab + v \quad \text{ou} \quad v < ab\,;$$

faisant les transformations sous cette forme, on voit que le nombre des solutions de l'équation

$$ax + by = \pi ab + v$$

est égal à la somme des nombres de solutions des équations

$$ax + by = \pi ab \quad \text{et} \quad ax + by = v.$$

Si cette dernière équation est impossible, alors le nombre des solutions est π; si elle est possible, le nombre des solutions est $\pi + 1$.

En faisant les substitutions successives, on parvient aux séries

$$x = \mathrm{F}\left(\frac{n}{a}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{n'}{a}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{n''}{a}\right) + \ldots + (-1)^{i-1}\,\mathrm{E}\left(\frac{n^{i-1}}{a}\right)$$
$$+ (-1)^{i}\, b\xi,$$

$$y = \mathrm{E}\left(\frac{n}{b}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{n'}{b}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{n''}{b}\right) + \ldots + (-1)^{i-1}\,\mathrm{E}\left(\frac{n^{i-1}}{b}\right)$$
$$+ (-1)^{i}\, b\eta;$$

$$\xi + \eta = \pi.$$

M. Sylvester a trouvé le nombre des solutions positives entières de l'équation générale $ax + by + cz \ldots = n$; ce travail, à ce que je sache, n'est pas encore publié.