NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ERNEST MALINVAUD

Solution de la question 415

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 123-124

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__123_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 415

(voir, p 31),

PAR M. ERNEST MALINVAUD,
Élève de l'institution Bourdeau, à Limoges.

On suppose que dans les deux triangles ABC, *abc*, les angles A et *a* sont égaux; de plus les côtés BC, *bc* opposés à ces angles sont entre eux dans le rapport des périmètres des triangles. Démontrer que ces triangles sont semblables.

Appelons a, b, c et a', b', c' les côtés des deux triangles, $2p$ et $2p'$ les périmètres. Les conditions de la question nous fournissent les relations suivantes :

$$(1) \qquad \frac{a}{a'} = \frac{p}{p'} = \frac{p-a}{p'-a'} = \frac{b+c}{b'+c'}.$$

La formule fondamentale de la trigonométrie rectiligne donne

$$1 + \cos A = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b'+c')^2 - a'^2}{2b'c'}, \quad \text{car} \quad A = A';$$

d'où l'on tire

$$\frac{bc}{b'c'} = \frac{p(p-a)}{p'(p'-p')} = \frac{a^2}{a'^2}.$$

Ainsi

$$\frac{(b+c)}{(b'+c')^2} = \frac{bc}{b'c'} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{4bc}{4b'c'}.$$

Il en résulte

$$(2) \qquad \frac{(b-c)^2}{(b'-c')^2} = \frac{a^2}{a'^2} \quad \text{et} \quad \frac{b-c}{b'-c'} = \frac{a}{a'}.$$

En comparant les relations (1) et (2), on obtient

$$\frac{a}{a'} = \frac{b+c}{b'+c'} = \frac{b-c}{b'-c'},$$

d'où

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

C. Q. F. D.

MM. Emile Daruty (de l'île Maurice), Laquières et Fénéon (élèves du lycée Saint-Louis) ont donné des solutions trigonométriques semblables; mais MM. Laquières et Fénéon ont aussi donné une démonstration géométrique fondée sur la considération des cercles ex-inscrits.