P. DELESTRÉE
LAQUIÈRES
FÉNÉON
BERGIS
S. DE SILGUY

Solution de la question 422

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 118-123
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__118_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 422

(voir p. 32);

PAR M. P. DELESTRÉE,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot),

MM. LAQUIÈRES, FÉNÉON,
Élèves du lycée Saint-Louis,

M. BERGIS,
Élève de l'institution Mayer.

ET M. S. DE SILGUY,
Élève des Carmes (classe de M. Gerono)

Discuter et construire le lieu représenté par l'équation

$$yx^2 + bx + c = 0.$$

Nous aurons quatre cas à considérer suivant que

$$\begin{array}{ll} b > 0, & c > 0, \\ b < 0, & c < 0, \\ b > 0, & c < 0, \\ b < 0, & c > 0; \end{array}$$

mais il suffira de faire la discussion en détail pour le premier cas, parce que les autres ne diffèrent du premier qu'en ce que la position relative des branches de courbe par rapport aux axes se trouve changée.

Résolvant par rapport à y,

$$y = -\frac{bx + c}{x^2}.$$

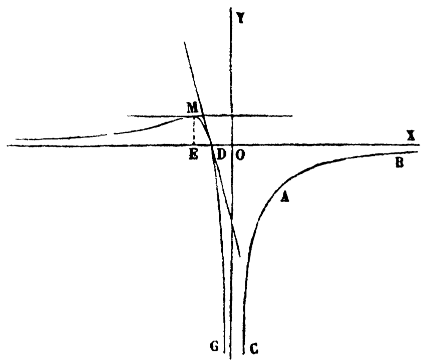
Pour toutes les valeurs positives de x, y reste constamment négative ; de plus pour $x = 0$,

$$y = \infty,$$

puis y décroît ensuite à mesure que x augmente, et quand on a $x = \infty$,

$$y = 0.$$

On obtient ainsi la branche CAB. Si nous donnons maintenant à x des valeurs négatives à partir de o, y est



d'abord infiniment grand négatif, puis il décroît en valeur absolue jusqu'à devenir nulle quand $x = -\frac{c}{b}$; audelà, elle prend des valeurs positives, croît d'abord, puis décroît ensuite jusqu'à o quand x est infinie après avoir passé par une valeur maximum. Nous obtiendrons ce maximum en cherchant les points où la tangente est horizontale. Prenant la dérivée,

$$y' = \frac{bx + 2c}{x^3}.$$

Un seul point a donc sa tangente horizontale et ce point a pour coordonnées

$$x = -\frac{2c}{b},$$

$$y = \frac{b^2}{4c}.$$

Il est à remarquer que l'abscisse OE est précisément le double de OD. Pour obtenir les points d'inflexion de la courbe, j'égale à zéro la dérivée seconde,

$$y'' = -\frac{2bx + 3c}{x^4}.$$

De là on déduit pour le point d'inflexion les coordonnées

$$x = -\frac{3c}{2b},$$

$$y = \frac{2b^2}{9c}.$$

Pour déterminer plus complétement la courbe, proposons-nous de chercher les tangentes aux points remarquables.

En D

$$y = 0,$$

$$x = -\frac{c}{b}.$$

Le coefficient angulaire de la tangente est $-\frac{b^3}{c^2}$: au point d'inflexion, ce coefficient a pour valeur $\frac{4b^3}{27c^2}$.

On peut encore remarquer que les valeurs

$$x = -\frac{c}{2b} \quad \text{et} \quad x = \frac{c}{b}$$

substituées dans l'équation donnent pour y la même quantité, ce qui prouve que la branche DG se rapproche plus vite de l'axe des y que la branche ABC.

En résolvant par rapport à y, on voit que l'hyperbole $xy = -\frac{b}{2}$ est diamétrale par rapport à la courbe donnée.

La discussion pour les trois autres cas serait identique.

(*) L'hyperbole diamétrale et la courbe proposée ont toutes deux pour asymptotes les axes coordonnés. Cette proposition est évidente pour $xy = -\frac{b}{2}$; nous pouvons la démontrer pour la courbe en appliquant la méthode générale des asymptotes; j'obtiens ainsi pour le coefficient angulaire

$$\lim \frac{y}{x} = c = 0$$

et pour l'ordonnée à l'origine

$$d = 0;$$

donc les asymptotes pour la courbe proposée sont bien encore les axes.

Note du Rédacteur. 1°. Les Européens habitent l'hémisphère boréal et écrivent de gauche à droite. De là l'usage de prendre les $+x$, direction de l'axe OX de gauche à droite, et les $-x$, direction de OX′ de droite à gauche; les $+y$, direction de OY vers le nord, et les $-y$, direction de OY′ vers le sud; les $+z$ vers le zénith, direction de l'axe OZ, et les $-z$, direction de OZ′ vers le nadir. Toutefois en mécanique on prend OZ vers le nadir, parce que c'est la direction de la pesanteur. De même pour étudier les mouvements des lignes trigonométriques, nous

*) Ce qui suit est de l'élève Delestier.

faisons volontiers parcourir la circonférence par un point de gauche à droite : la direction opposée choque nos habitudes européennes. Les Orientaux, écrivant de droite à gauche, ont d'autres habitudes. Léonard de Vinci écrivait l'italien de droite à gauche : caprice d'artiste.

On connaît l'importante différence entre les directions *dextrorsum* et *sinistrorsum* dans l'électricité dynamique et dans les phénomènes de polarisation.

2°. Soit

$$yx^2 + bz + c = 0$$

l'équation d'une surface du troisième degré; donnons à y la valeur constante a. On obtient

$$z = \frac{c - ax^2}{b};$$

et prenons cette suite de valeurs de z,

$$x = 0, \quad z_1 = \frac{c}{b},$$

$$x = z_1, \quad z_2 = \frac{c - az_1^2}{b} = \frac{cb_2^2 - ac^2}{b^3},$$

$$x = z_2, \quad z_3 = \frac{c - az_2^2}{b} = \frac{cb^3 - abc^2 + a^2c^3}{b^4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x = z_n, \quad z_{n+1} = \frac{c - az_n}{b}.$$

Il est évident que z_{n+1} est une fonction de a, b, c dont la formation est une question très-difficile de calcul inverse des différences, non encore résolue. M. Gerono a le premier découvert cette belle et utile propriété de ces fonctions (t. XVI, p. 436). Lorsque a, b, $b^2 + 4ac$ sont positifs et que l'on a

$$\frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2};$$

alors x' étant la plus petite racine de l'équation

$$ax^2 + bx - c = 0,$$

la série z_1, z_3, z_5, etc., décroît vers x' et la série x_2, x_4, x_6, etc., croît vers x' et $z = x'$.

Le plan qui a pour équation

$$y = a$$

coupe la surface suivant une ligne dont la projection sur le plan xz est la parabole

$$ax^2 + bz - c = 0.$$

L'intersection de cette parabole par la bissectrice $x = z$ donne les deux racines de l'équation

$$ax^2 + bx - c = 0.$$

Soit x' la plus petite racine, les valeurs des z_n seront alternativement au-dessus et au-dessous du plan $z = x'$.

Pour la vraie signification des racines infinies, il faut lire la Note de M. Gerono (t. III, p. 32; 1844); c'est ce qu'on a dit de plus satisfaisant, de plus rationnel et de plus complet sur cette matière.