NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. CHANSON
P. CHALLIOT

Solution des questions 401, 402 et 403

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 113-118
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__113_1>

SOLUTION DES QUESTIONS 401, 402 ET 403

(voir t. XVI, p. 401);

PAR M. A. CHANSON ET P. CHALLIOT (*),
Élèves au lycée de Versailles (classe de M. Vannson).

Question 401.

On projette un point d'une ellipse sur les deux axes, démontrer que l'enveloppe de la droite qui joint les deux projections est la développée d'une ellipse.

Même question pour l'hyperbole.

Soient x_1, y_1 les coordonnées d'un point de l'ellipse, on aura

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1; \tag{1}$$

l'équation de la droite joignant les pieds des perpendiculaires sera

$$\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}=1. \tag{2}$$

Appliquant le théorème qui sert à trouver les courbes enveloppes, nous aurons

$$\frac{\left(\dfrac{2x_1^2}{a^2}\right)}{\left(-\dfrac{x}{x_1^2}\right)}=\frac{\left(\dfrac{2y_1^2}{b_2}\right)}{\left(-\dfrac{y}{y_1^2}\right)}$$

(*) MM. Laquières, Carenou, Lamacq, Mendes, élèves du lycée Saint Louis, ont adressé des solutions analogues.

ou

$$\frac{x_1^3}{a^2 x} = \frac{y_1^3}{b^2 y} = k^3;$$

on tire de là

$$x_1 = k\,(a^2 x)^{\frac{1}{3}}, \quad y_1 = k\,(b^2 y)^{\frac{1}{3}}.$$

Portant dans les équations (1) et (2), la première donne

$$k^2 \left[\frac{(a^2 x)^{\frac{2}{3}}}{a^2} + \frac{(b^2 y)^{\frac{2}{3}}}{b^2}\right] = 1$$

ou

$$(3) \qquad k^2 \left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}\right] = 1.$$

La seconde donne

$$k = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}.$$

Remplaçant k par cette valeur dans l'équation (3), il viendra

$$\left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}\right]^3 = 1,$$

d'où

$$(bx)^{\frac{2}{3}} + (ay)^{\frac{2}{3}} = (ab)^{\frac{2}{3}},$$

équation de la développée d'une ellipse dont nous allons chercher les axes.

La développée d'une ellipse dont les axes sont A, B a pour équation

$$(\mathrm{A}x)^{\frac{2}{3}} + (\mathrm{B}y)^{\frac{2}{3}} = (\mathrm{C}^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Pour que ces deux équations soient identiques, il faut que les coefficients soient respectivement proportionnels

$$\frac{A}{b} = \frac{A^2 - B^2}{ab} = \frac{B}{a},$$

d'où l'on déduit

$$A = \frac{ab^2}{b^2 - a^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{a^2 b}{b^2 - a^2}.$$

Quant à l'hyperbole, comme l'équation de l'hyperbole

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2$$

ne diffère de celle de l'ellipse qu'en ce que b^2 est remplacé par $-b^2$, il suffit, dans le résultat final, de remplacer b^2 par $-b^2$ et l'on a

$$(ay)^{\frac{2}{3}} - (bx)^{\frac{2}{3}} = -(ab)^{\frac{2}{3}}.$$

Question 402.

On projette orthogonalement un point d'un ellipsoïde sur ses trois plans principaux, trouver l'enveloppe du plan qui passe par les trois points.

Même question pour les deux hyperboloïdes.

Soient x', y', z' les coordonnées d'un point de l'ellipsoïde, on aura

$$(1) \qquad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1.$$

L'équation du plan passant par les pieds des trois perpendiculaires sera

$$(2) \qquad \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 2.$$

Appliquant le théorème qui sert à trouver les surfaces enveloppes, nous obtiendrons

$$\frac{x_1^3}{a^2 x} = \frac{y_1^3}{b^2 y} = \frac{z_1^3}{c^2 z} = \lambda^3,$$

d'où

$$x_1 = k(a^2 x)^{\frac{1}{3}}, \quad y_1 = k(b^2 y)^{\frac{1}{3}}, \quad z_1 = k(c^2 z)^{\frac{1}{3}}.$$

Portant dans les équations (1) et (2), la première donne

$$k^2 \left[\frac{(a^2 x)^{\frac{2}{3}}}{a^2} + \frac{(b^2 y)^{\frac{2}{3}}}{b^2} + \frac{(c^2 z)^{\frac{2}{3}}}{c^3} \right] = 1$$

ou bien

$$(3) \qquad k^2 \left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}} + \frac{z^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}} \right] = 1,$$

et la seconde donne

$$k = \frac{1}{2} \left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}} + \frac{z^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}} \right].$$

Remplaçant k par sa valeur dans l'équation (3), on obtient

$$\frac{1}{4} \left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{2}{3}}} + \frac{z^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}} \right]^3 = 1$$

ou

$$(bcx)^{\frac{2}{3}} + (acy)^{\frac{2}{3}} + (abz)^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{2}{3}}.b^{\frac{2}{3}}.c^{\frac{2}{3}};$$

enfin

$$(bcx)^{\frac{2}{3}} + (acy)^{\frac{2}{3}} + (abz)^{\frac{2}{3}} = (2abc)^{\frac{2}{3}},$$

équation qui a beaucoup d'analogie avec celle de la développée de l'ellipse.

L'hyperboloïde à une nappe ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

il suffit de remplacer dans l'équation ci-dessus c^2 par $-c^2$, ce qui donne

$$-(bcx)^{\frac{2}{3}} - (acy)^{\frac{2}{3}} + (abz)^{\frac{2}{3}} = -(2abc)^{\frac{2}{3}}.$$

ou

$$(bcx)^{\frac{2}{3}} + (acy)^{\frac{2}{3}} - (abz)^{\frac{2}{3}} = (2abc)^{\frac{2}{3}}.$$

Quant à l'hyperboloïde à deux nappes, son équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

ou

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

il suffit, dans le résultat final, de remplacer a^2 et b^2 par $-a^2$ et $-b^2$, ce qui donne

$$-(bcx)^{\frac{2}{3}} - (acy)^{\frac{2}{3}} + (baz)^{\frac{2}{3}} = (2abc)^{\frac{2}{3}}$$

ou

$$(bcx)^{\frac{2}{3}} + (acy)^{\frac{2}{3}} - (abz)^{\frac{2}{3}} = -(2abc)^{\frac{2}{3}}.$$

Question 403.

Ecrire l'équation d'un faisceau de surfaces qui passent par le point (x', y', z') et par l'intersection des deux surfaces

$$f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0.$$

L'équation générale des surfaces passant par l'intersection des deux surfaces proposées sera

$$\lambda f(x, y, z) + \varphi(x, y, z) = 0,$$

λ étant une indéterminée arbitraire. Exprimons que le point $(x' y' z')$ est sur la surface

$$\lambda f(x', y', z') + \varphi(x', y', z') = 0,$$

d'où

$$\lambda = -\frac{\varphi(x', y', z')}{f(x', y', z')},$$

par suite l'équation demandée est

$$\frac{f(x, y, z)}{f(x', y', z')} = \frac{\varphi(x, y, z)}{\varphi(x', y', z')}.$$