VANNSON

Note sur la question résolue pages 376, 430 et 463 (tome XVI)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 108-113

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__108_1>

NOTE SUR LA QUESTION RÉSOLUE PAGES 376, 430 ET 463 (Tome XVI);

PAR M. VANNSON.

On donne l'équation

$$x = A \sin x + B,$$

trouver le nombre des racines réelles.

La solution donnée page 376 ne précise pas le nombre des racines. Celle donnée page 430 me semble présenter une assertion inexacte. L'auteur dit (p. 431) : « Dans l'intervalle de x' à $x' + \pi$ la dérivée $1 - A\cos x$ s'annule au plus une fois, soit $x' = \frac{3\pi}{2}$; depuis $\frac{3\pi}{2}$ jusqu'à $\frac{5\pi}{2}$ la dérivée, A étant supposé positif s'annule deux fois. De plus, quand on arrive à des valeurs de x qui donnent des résultats de même signe, il est bon de faire voir que ces nombres substitués ne comprennent pas de racines de la proposée quoiqu'ils puissent comprendre des racines de la dérivée égalée à zéro.

Pour tenir compte de ces remarques, je proposerai la rédaction suivante qui s'écarte peu de la marche suivie par M. Jozon.

Je supposerai

$$A > B, \quad A > 0, \quad B > 0.$$

Si nous remplaçons x par

$$\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} + \pi \ldots, \quad \frac{\pi}{2} + h\pi \ldots, \quad \frac{\pi}{2} + z\pi,$$

nous trouvons alternativement plus et moins. J'appelle z le dernier multiplicateur de π pour lequel cette alternance de signes ait lieu; quand h est impair, on a toujours moins; donc z est impair, sans quoi $z + 1$ donnerait le signe moins, et comme par hypothèse z a donné plus, nous n'aurions pas atteint la limite. Ainsi $\frac{\pi}{2} + z\pi$ mis à la place de x a donné moins; le nombre précédent $\frac{\pi}{2} + (z - 1)\pi$ a donc dû donner plus, ce qui donne l'égalité ($z - 1$ étant pair)

$$A + B - z\pi + \frac{\pi}{2} > 0$$

ou

$$z < \frac{A + B}{\pi} + \frac{1}{2}.$$

Il faut donc prendre pour z le nombre *impair* immédiatement au-dessous de $\frac{A + B}{\pi} + \frac{1}{2}$. Supposons comme dans l'exemple

$$A = A'\pi, \quad B = B'\pi,$$

A', B' étant entiers, on aura

$$z = A' + B',$$

si cette somme est impaire, et, dans le cas contraire,

$$z = A' + B' - 1.$$

Dans l'exemple donné, c'est $A' + B' - 1$ qui donne le nombre des racines positives. Remplaçons maintenant x par la série décroissante

$$\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} - \pi, \quad \frac{\pi}{2} - 2\pi, \ldots, \quad \frac{\pi}{2} - h\pi, \ldots, \quad \frac{\pi}{2} - z'\pi, \ldots,$$

on aura alternativement plus et moins; c'est toujours plus quand h est pair, donc z' est un nombre pair, sans quoi le résultat de la dernière substitution serait négatif, et $\frac{\pi}{2} - (z' + 1)\pi$ donnant le signe $+$, la série ne serait pas complète. L'avant-dernier terme, savoir $\frac{\pi}{2} - (z' - 1)\pi$ a donc donné le signe moins, ce qui conduit à l'inégalité

$$B - A + z'\pi - \frac{3\pi}{2} < 0,$$

d'où

$$z' < \frac{A - B}{\pi} + \frac{3}{2}.$$

Il faudra prendre pour z' le plus grand nombre *pair* satisfaisant à cette inégalité. Conservant les suppositions déjà admises, on aura

$$z' < A' - B' + 1 + \frac{1}{2};$$

si $A' + B'$ est impair, $A' - B'$ le sera aussi et on aura

$$z' = A' - B' + 1.$$

Le nombre total des racines trouvées est alors $2A' + 1$. Dans le cas où $A' - B'$ est pair, on a

$$z' = A' - B',$$

et le nombre des racines obtenues est

$$2A' - 1 = 1999$$

si $A' = 1000$ et $B' = 50$. Il reste à démontrer qu'entre deux termes consécutifs de la série

$$h\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad (h+1)\pi + \frac{\pi}{2},$$

il ne tombe qu'une racine; en effet si h est pair, le cosinus d'un arc compris entre ces deux termes est négatif, donc il n'y a dans cet intervalle aucune racine de la dérivée égalée à zéro; mais si h est impair, il tombe entre $h\pi + \frac{\pi}{2}$ et $(h+1)\pi + \frac{\pi}{2}$ deux racines de l'équation

$$\varphi' x = 0.$$

Pour qu'il en résultât l'existence de trois racines entre les nombres substitués, il faudrait que la première racine de $\varphi' x = 0$ donnât à φx un signe contraire à celui que donne $h\pi + \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire le signe plus, et que la deuxième racine donnât moins.

Soit x' la plus petite racine positive de l'équation

$$A \cos x - 1 = 0$$

obtenue en égalant la dérivée à zéro. Les deux racines de cette même équation entre $h\pi + \frac{\pi}{2}$ et $(h+1)\pi + \frac{\pi}{2}$ sont

$$(h+1)\pi - x' \quad \text{et} \quad (h+1)\pi + x';$$

pour que la première mise au lieu de x dans l'équation proposée donne plus, il faut avoir

$$-A \sin x' + B - (h+1)\pi + x' > 0,$$

et pour que la deuxième donne moins, il faut avoir

$$A \sin x' + B - (h+1)\pi - x' < 0;$$

d'où l'on peut tirer

$$A < \frac{x'}{\sin x'}.$$

Mais

$$A = \frac{1}{\cos x'},$$

on aurait donc

$$\tang x' < x',$$

ce qui est impossible.

Si l'on objectait que le problème revient à couper une sinusoïde par une droite et qu'il peut évidemment y avoir trois intersections entre les abscisses $3\frac{\pi}{2}$ et $5\frac{\pi}{2}$, il suffirait de remarquer qu'il faut avoir pour cela l'ordonnée de la droite à l'origine plus grande que 1 en valeur absolue, d'où il résulte $A < B$, et c'est le cas contraire que nous avons supposé. On verra de la même manière que si deux termes $h\pi + \frac{\pi}{2}$ et $(h+1)\pi + \frac{\pi}{2}$ donnent dans l'équation des résultats de signe moins, ils ne comprennent entre eux aucune racine de l'équation.

Car s'ils comprenaient deux racines, il devrait y avoir entre eux une racine de $\varphi' x = 0$ donnant à φx une valeur positive; nous supposerons h impair, afin qu'il y ait des racines de $\varphi' x = 0$ entre $h\pi + \frac{\pi}{2}$ et $(h+1)\pi + \frac{\pi}{2}$. La racine de $\varphi' x = 0$ qui peut donner un résultat positif est $(h+1)\pi + x'$ et il faudrait avoir pour cela l'inégalité

$$A \sin x' + B - (h+1)\pi - x' > 0,$$

d'où

$$h + 1 < A' \sin x' + B' - \frac{x'}{\pi} < A' + B' - \frac{\theta}{2},$$

θ étant plus petit que 1. D'où

$$h < A' + B' - 1.$$

En sorte que les nombres substitués à x appartiendraient à la série de substitutions pour lesquelles on a trouvé des résultats de lignes alternativement positifs et négatifs; ce qui est contre l'hypothèse.