

CREMONA

**Solution analytique de la question  
344 (Mannheim)**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 16  
(1857), p. 79-82

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1857\\_1\\_16\\_\\_79\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__79_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION 544 (MANNHEIM)

(voir t. XV, p. 383),

PAR M. CREMONA,

Professeur à l'université de Padoue.

---

Soient  $x_1, y_1, z_1$  et  $x_2, y_2, z_2$  les coordonnées des points A, O, celles des points B, C seront de la forme :

$$\begin{aligned}x_3 &= x_1 + \lambda h, & y_3 &= y_1 + \lambda h, \\x_4 &= x_1 + \mu m, & y_4 &= y_1 + \mu n,\end{aligned}$$

$h, k, l, m$  sont des quantités données,  $\lambda, \mu$  deux indéterminées; donc

$$2\text{ABO} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ h & h \end{vmatrix},$$

et analogiquement

$$2\text{AOC} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \\ m & n \end{vmatrix}.$$

Il s'ensuit

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{ABO} + \frac{1}{AOC} \right) = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ \lambda h - \mu m & \lambda k - \mu n \end{vmatrix}}{\lambda \mu \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ h & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ m & n \end{vmatrix}};$$

mais les points B, C, O étant en ligne droite, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ \lambda h - \mu m & \lambda k - \mu n \end{vmatrix} - \lambda \mu \begin{vmatrix} h & k \\ n & m \end{vmatrix} = 0,$$

par conséquent,

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{ABO} + \frac{1}{AOC} \right) = \frac{\begin{vmatrix} h & k \\ m & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ h & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ m & n \end{vmatrix}},$$

quantité indépendante de  $\lambda, \mu$ . Donc, etc.

### *Théorème analogue dans l'espace.*

Par un point O situé dans l'intérieur d'un triangle trièdre de sommet A, on mène un plan qui coupe les arêtes du trièdre dans les points B, C, D. Soient  $v, v_2, v_3$  les valeurs des trois pyramides AOCD, AODB, AOBC; je dis que la somme

$$\sqrt{\frac{v_1}{v_2 v_3}} + \sqrt{\frac{v_2}{v_1 v_3}} + \sqrt{\frac{v_3}{v_1 v_2}}$$

est constante, de quelque manière qu'on mène le plan sécant.

Soient  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_3, y_3, z_3$  les coor-

( 81 )

données des cinq points A, O, B, C, D;  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$  sont des quantités données ainsi que les  $\alpha, \beta, \gamma$  on aura

$$\frac{x_3 - x_1}{\alpha_1} = \frac{y_3 - y_1}{\beta_1} = \frac{z_3 - z_1}{\gamma_1} = \lambda,$$

$$\frac{x_4 - x_1}{\alpha_2} = \frac{y_4 - y_1}{\beta_2} = \frac{z_4 - z_1}{\gamma_2} = \mu,$$

$$\frac{x_5 - x_1}{\alpha_3} = \frac{y_5 - y_1}{\beta_3} = \frac{z_5 - z_1}{\gamma_3} = \nu,$$

donc

$$6v_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} = \mu\nu \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \mu\nu A,$$

et par analogie

$$6v_2 = \nu\lambda \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = \nu\lambda B,$$

$$6v_3 = \lambda\mu \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \lambda\mu C,$$

A, B, C sont des quantités connues; d'où

$$\frac{1}{6^{\frac{1}{2}}} \frac{v_1 + v_2 + v_3}{\sqrt{v_1 v_2 v_3}} = \frac{\mu\nu A + \nu\lambda B + \lambda\mu C}{\lambda\mu\nu \sqrt{ABC}}.$$

Mais les points O, A, B, C étant dans un même plan, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} = 0,$$

( 82 )

remplaçant  $x_3$  par  $\lambda\alpha_1 + x_1$ ,  $y_3$  par  $\lambda\beta_1 + y_1$ ,  $z_3$  par  $\lambda\gamma_1 + z_1$ , etc., on obtient

$$\mu\nu A + \nu\lambda B + \lambda\mu C = \lambda\mu\nu \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \lambda\mu\nu D,$$

donc

$$\frac{1}{6^{\frac{1}{2}}} \left( \sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_2 \nu_3}} + \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_3 \nu_1}} + \sqrt{\frac{\nu_3}{\nu_1 \nu_2}} \right) = \frac{D}{\sqrt{ABC}},$$

quantité indépendante de  $\lambda, \mu, \nu$ .

C'est ce qu'il fallait prouver.