

GERONO

Note sur une question proposée aux examens d'admission à l'École navale (1856)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 76-79

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__76_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE

Sur une question proposée aux examens d'admission
à l'École Navale (1856).

Étant données les équations

$$(1) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A,$$

$$(2) \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B,$$

$$(3) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C,$$

dans lesquelles a, b, c représentent des nombres positifs, et A, B, C des angles compris chacun entre 0 et 180 degrés, en déduire les relations

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

et

$$A + B + C = 180^\circ (*).$$

En additionnant (1) et (2), on trouve

$$(4) \quad c = a \cos B + b \cos A.$$

(* Pour déduire des équations proposées (1), (2), (3), l'égalité

$$A + B + C = 180^\circ,$$

on a admis que la somme des trois angles A, B, C qui entrent dans ces équations n'excede pas 180 degrés; c'est là une restriction qui n'est pas nécessaire. Pour que

$$A + B + C = 180^\circ,$$

il suffit que A, B, C soient des angles compris entre 0 et 180 degrés, comme ceux que l'on considère ordinairement en géométrie élémentaire

G.

Et, en retranchant (2) de (1), il vient

$$(5) \quad a^2 - b^2 = c(a \cos B - b \cos A).$$

La multiplication des équations (4) et (5) donne ensuite

$$a^2 - b^2 = a^2 \cos^2 B - b^2 \cos^2 A;$$

d'où

$$a^2(1 - \cos^2 B) = b^2(1 - \cos^2 A)$$

et

$$a^2 \sin^2 B = b^2 \sin^2 A.$$

Les quantités a , b , $\sin B$, $\sin A$ étant positives, l'équation

$$a^2 \sin^2 B = b^2 \sin^2 A$$

revient à

$$a \sin B = b \sin A.$$

On en tire

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

On démontrerait de même que

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

Pour établir l'égalité

$$A + B + C = 180^\circ,$$

divisons par c tous les termes de l'équation

$$(4) \quad c = a \cos B + b \cos A,$$

il en résultera

$$1 = \frac{a}{c} \cos B + \frac{b}{c} \cos A. \quad \bullet$$

Or, les relations

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

donnent

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C},$$

donc

$$1 = \frac{\sin A \cos B + \sin B \cos A}{\sin C},$$

d'où

$$(6) \quad \sin C = \sin(A + B).$$

On trouverait de même

$$(7) \quad \sin B = \sin(A + C).$$

Par suite

$$\sin C + \sin B = \sin(A + B) + \sin(A + C)$$

ou

$$\begin{aligned} & 2 \sin\left(\frac{C+B}{2}\right) \cos\left(\frac{C-B}{2}\right) \\ &= 2 \sin\left(A + \frac{C+B}{2}\right) \cos\left(\frac{C-B}{2}\right), \end{aligned}$$

équation qui se réduit à

$$(8) \quad \sin\left(\frac{C+B}{2}\right) = \sin\left(A + \frac{C+B}{2}\right).$$

L'angle $\frac{C+B}{2}$ étant moindre que 180 degrés, on a

$$\sin\left(\frac{C+B}{2}\right) > 0,$$

et, par conséquent,

$$\sin\left(A + \frac{C+B}{2}\right) > 0.$$

(79)

De cette dernière inégalité on peut conclure

$$A + \frac{C + B}{2} < 180^\circ,$$

parce que, d'après l'hypothèse, $A + \frac{C + B}{2}$ est moindre

que 360 degrés. Les angles inégaux $\frac{C + B}{2}$, $A + \frac{C + B}{2}$,
compris entre 0 et 180 degrés, ayant le même sinus (8),
sont nécessairement supplémentaires. Donc

$$A + B + C = 180^\circ.$$

G.
