Nouvelles annales de mathématiques

Gerono

Note sur une question proposée aux examens d'admission à l'École navale (1856)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 76-79

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__76_0>

NOTE

Sur une question proposée aux examens d'admission à l'École Navale (1856).

Étant données les équations

$$(1)\qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A,$$

$$(2)\qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B,$$

$$(3)\qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C,$$

dans lesquelles a, b, c *représentent des nombres positifs, et* A, B, C *des angles compris chacun entre* 0 *et* 180 *degrés, en déduire les relations*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

et

$$A + B + C = 180^\circ \text{ (*)}.$$

En additionnant (1) et (2), on trouve

$$(4)\qquad c = a\cos B + b\cos A.$$

(*) Pour déduire des équations proposées (1), (2), (3), l'égalité

$$A + B + C = 180^\circ,$$

on a admis que la somme des trois angles A, B, C qui entrent dans ces équations n'excède pas 180 degrés ; c'est là une restriction qui n'est pas nécessaire. Pour que

$$A + B + C = 180^\circ,$$

il suffit que A, B, C soient des angles compris entre 0 et 180 degrés, comme ceux que l'on considère ordinairement en géométrie élémentaire

G.

Et, en retranchant (2) de (1), il vient

(5) $$a^2 - b^2 = c\,(a \cos B - b \cos A).$$

La multiplication des équations (4) et (5) donne ensuite

$$a^2 - b^2 = a^2 \cos^3 B - b^2 \cos^2 A\,;$$

d'où

$$a^2 (1 - \cos^2 B) = b^2 (1 - \cos^2 A)$$

et

$$a^2 \sin^2 B = b^2 \sin^2 A.$$

Les quantités a, b, $\sin B$, $\sin A$ étant positives, l'équation

$$a^2 \sin^2 B = b^2 \sin^2 A$$

revient à

$$a \sin B = b \sin A.$$

On en tire

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

On démontrerait de même que

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

Pour établir l'égalité

$$A + B + C = 180^\circ,$$

divisons par c tous les termes de l'équation

(4) $$c = a \cos B + b \cos A,$$

il en résultera

$$1 = \frac{a}{c} \cos B + \frac{b}{c} \cos A.$$

Or, les relations

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

donnent

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C},$$

donc

$$1 = \frac{\sin A \cos B + \sin B \cos A}{\sin C},$$

d'où

$$(6) \qquad \sin C = \sin (A + B).$$

On trouverait de même

$$(7) \qquad \sin B = \sin (A + C).$$

Par suite

$$\sin C + \sin B = \sin (A + B) + \sin (A + C)$$

ou

$$2 \sin \left(\frac{C + B}{2}\right) \cos \left(\frac{C - B}{2}\right)$$

$$= 2 \sin \left(A + \frac{C + B}{2}\right) \cos \left(\frac{C - B}{2}\right),$$

équation qui se réduit à

$$(8) \qquad \sin \left(\frac{C + B}{2}\right) = \sin \left(A + \frac{C + B}{2}\right).$$

L'angle $\frac{C + B}{2}$ étant moindre que 180 degrés, on a

$$\sin \left(\frac{C + B}{2}\right) > 0,$$

et, par conséquent,

$$\sin \left(A + \frac{C + B}{2}\right) > 0.$$

De cette dernière inégalité on peut conclure

$$A + \frac{C + B}{2} < 180^\circ,$$

parce que, d'après l'hypothèse, $A + \frac{C + B}{2}$ est moindre que 360 degrés. Les angles inégaux $\frac{C + B}{2}$, $A + \frac{C + B}{2}$, compris entre 0 et 180 degrés, ayant le même sinus (8), sont nécessairement supplémentaires. Donc

$$A + B + C = 180^\circ.$$

G.