

GERONO

**Solution d'une question proposée aux
examens d'admission à l'école navale (1856)**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 5-9

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__5_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

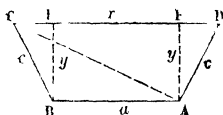
<http://www.numdam.org/>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SOLUTION D'UNE QUESTION PROPOSÉE AUX EXAMENS
D'ADMISSION À L'ÉCOLE NAVALE (1856).



On donne la plus petite des deux bases AB, CD, d'un trapèze ABCD, et la longueur des côtés non parallèles BC, AD supposés égaux entre eux : déterminer le maximum de l'aire du trapèze.

Menons des points A, B les perpendiculaires AE, BF sur CD, et posons

$$AB = a, \quad BC = AD = c, \quad CD = x, \quad AE = BF = y.$$

L'aire du trapèze sera exprimée par $\left(\frac{x+a}{2}\right)y$. D'ailleurs les triangles rectangles ADI', BCF étant égaux entre eux, on aura

$$DE = FC,$$

et, par suite,

$$DE = \frac{CD - AB}{2} = \frac{x - a}{2}.$$

Ce qui donnera

$$y = \sqrt{c^2 - \left(\frac{x-a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4c^2 - (x-a)^2}.$$

De là résulte

$$\left(\frac{x+a}{2}\right)y = \frac{1}{4} \sqrt{(x+a)^2 [4c^2 - (x-a)^2]}.$$

Il s'agit donc de trouver la valeur de x qui rend *maximum* le produit $(x+a)^2 [4c^2 - (x-a)^2]$ que l'on peut écrire ainsi :

$$(1) \quad (x+a)(x+a-x+2c-a)(2c+a-x).$$

Cela posé, désignons par α, β, γ trois nombres quelconques et mettons le produit (1) sous cette forme :

$$\left(\frac{x+a}{\alpha}\right) \left(\frac{x+a}{\beta}\right) \left(\frac{x+2c-a}{\beta}\right) \left(\frac{2c+a-x}{\gamma}\right) \times \alpha^2 \beta \gamma.$$

Le nombre $\alpha^2 \beta \gamma$ étant constant, il est clair que le maximum cherché correspond au maximum de

$$(2) \quad \left(\frac{x+a}{\alpha}\right) \left(\frac{x+a}{\beta}\right) \left(\frac{x+2c-a}{\beta}\right) \left(\frac{2c+a-x}{\gamma}\right).$$

Or, les valeurs des nombres α, β, γ étant arbitraires, on en pourra disposer de manière que la somme des quatre facteurs

$$\frac{x+a}{\alpha}, \quad \frac{x+a}{\beta}, \quad \frac{x+2c-a}{\beta}, \quad \frac{2c+a-x}{\gamma},$$

soit constante, c'est-à-dire indépendante de x : il suffit, pour cela, d'attribuer aux nombres α, β, γ des valeurs telles, que le coefficient de x dans la somme dont il s'agit

soit nul. Ce qui donne

$$(3) \quad \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{6} - \frac{1}{\gamma} = 0.$$

Cette première condition étant supposée remplie, il faudra, pour que le produit (2) soit maximum, que ses facteurs soient égaux entre eux. On aura donc

$$(4) \quad \frac{x+a}{\alpha} = \frac{x+2c-a}{6},$$

$$(5) \quad \frac{x+a}{\alpha} = \frac{2c+a-x}{\gamma};$$

la valeur positive de x déduite du système des équations (3), (4), (5) représentera la plus grande des deux bases du trapèze maximum (*).

Des équations (4) et (5), on tire

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{x+a}{x+2c-a} \right),$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{x+a}{2c+a-x} \right);$$

et, en remplaçant $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{\gamma}$ par les expressions précédentes, dans (3), il vient

$$2 + \frac{x+a}{x+2c-a} - \frac{x+a}{2c+a-x} = 0,$$

d'où

$$2[4c^2 - (x-a)^2] + 2(x+a)(a-x) = 0.$$

(*) Cette méthode élémentaire pour résoudre quelques questions relatives au maximum et au minimum d'une fonction d'une seule variable a été indiquée par M. Grillet, professeur au lycée de Brest (*Nouvelles Annales*, t. IX, p. 70).

En développant et réduisant, on trouve l'équation

$$(6) \quad x^2 - ax - 2c^2 = 0,$$

dont la racine positive

$$\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2c^2}$$

est la plus grande des deux bases du trapèze cherché. Les quatre côtés du trapèze étant déterminés, il sera facile de le construire et d'avoir l'expression de sa surface en fonction des données a, c .

L'équation (6)

$$x^2 - ax - 2c^2 = 0$$

donne

$$x(x - a) = 2c^2$$

ou

$$x \left(\frac{x - a}{2} \right) = c^2.$$

Or,

$$x = CD$$

et

$$\frac{x - a}{2} = DE,$$

donc

$$CD \times DE = \overline{DA}^2.$$

Cette dernière égalité montre que le triangle CAD est rectangle en A. Il s'ensuit que CD est le diamètre du cercle circonscrit au trapèze.

Lorsque $c = a$, la valeur de

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2c^2}$$

se réduit à $2a$, les côtés CB, BA, AD sont égaux au rayon du cercle circonscrit au trapèze dont le diamètre est CD. Et chacun des deux angles DAB, ABC est égal à 120 degrés. G.

SOLUTION DE LA QUESTION 345

(voir tome XV, page 383),

PAR M. DE ROCHAS,

Élève à l'école préparatoire de Sainte-Barbe (classe de M. Gerono),

ET M. GRELLEY,

Élève à la même école (classe de M. Vieille.)

$f(x) = 0$ est une équation à coefficients entiers; si $f(0)$ et $f(1)$ sont des nombres impairs, l'équation n'a pas de racines entières. (GAUSS.)

Le polynôme $f(x)$ étant un polynôme algébrique entier, pourra se mettre sous la forme

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_{m-1} x + A_m,$$

m étant un nombre entier. Nous aurons alors

$$f(0) = A_m$$

et

$$f(1) = A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_{m-1} + A_m,$$

$f(0)$ et $f(1)$ étant, par hypothèse, deux nombres impairs.

Supposons que l'équation

$$f(x) = 0$$

admette une racine entière a , elle sera paire ou impaire. Dans le premier cas, chacun des m premiers termes de $f(a)$ étant pair, puisque les coefficients sont entiers,