NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. ROUSSIN

R. GIBOL

Solution de la question 355

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 55-57

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__55_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 535

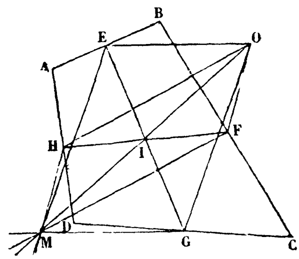
(voir t. XV, p. 4[illegible]),

PAR MM. A. ROUSSIN ET R. GIBOL,
Élèves de Sainte-Barbe, classe spéciale.

Étant donnés un quadrilatère ABCD et un point O dans son plan, on joint ce point aux milieux des côtés et des diagonales du quadrilatère. Par chaque point milieu, on mène une parallèle à la droite joignant le point O au milieu du côté opposé. Prouver que les six parallèles concourent au même point.

Rappelons d'abord que dans un quadrilatère les droites joignant les milieux des côtés opposés et des diagonales se coupent au même point en deux parties égales.

Soient E, F, G, H les milieux des côtés AB, BC, CD, DE, etc. Joignons OE, OF, OG, OH; par E et G menons les parallèles EM et GM à OG et à OE; elles se coupent



en M, et OEMG est un parallélogramme. Le problème revient à prouver que si l'on joint MF et MH, ces droites sont respectivement parallèles à OH et OF.

Or dans OEMG les deux diagonales EG et OM se coupent en leurs milieux au point I. Ce point est aussi le milieu de HF. Nous en déduisons que OHMF est un parallélogramme et que MH et MF sont parallèles à OE et OH.

On démontrerait absolument de même que les deux autres parallèles menées par chaque point milieu des deux diagonales à la droite joignant le point O à l'autre, concourent au même point M.

Note du Rédacteur. Les deux faisceaux de six droites chacun qui partent de O et de M sont homographiques, car les points milieux sont des points correspondant harmoniquement à des points situés à l'infini. Projetant la figure coniquemeut, ces six points à l'infini sont en ligne droite L et en involution. Les trois parallélogrammes deviennent des quadrilatères où les côtés opposés se rencontrent en des points situés sur la même droite L. Tirant donc arbitrairement une droite L dans le plan du quadrilatère ABCD, les quatre côtés et les deux diagonales prolongées coupent la droite L en six points; prenant les harmoniques de ces six points, on obtient sur les quatre côtés et les deux diagonales six autres points. Ce qui donne lieu à un théorème général de géométrie segmentaire. Les parallélogrammes deviennent des quadrilatères ayant en commun la diagonale OM; dans chacun, les côtés opposés se coupent en un point situé sur la droite L.