NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. ROCHETTE

Solution de la question 339

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 45-47

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__45_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 339

(voir t. XV, p. 291),

PAR LE P. H. ROCHETTE, S. J., ET UN ANONYME.

Toutes les circonférences ayant leurs centres sur une même droite et coupant à angle droit une circonférence donnée ont même axe radical, et toutes ces circonférences prises deux à deux et la circonférence donnée ont même centre radical. (MANNHEIM.)

Soient m le centre de la circonférence donnée, pp la droite donnée; du point m abaissons une perpendiculaire mh sur pp: un point quelconque m_1, pris sur cette perpendiculaire, sera d'égale puissance par rapport à deux cercles P_1, P_2 ayant leurs centres en p_1, p_2 sur la ligne pp et coupant à angle droit la circonférence M. (Nous désignerons le rayon d'un cercle par la lettre R affectée de la lettre du centre comme indice.)

On a

$$\overline{m_1p_1}^2 = \overline{m_1h}^2 + \overline{hp_1}^2 = \overline{m_1h}^2 + \overline{mp_1}^2 - \overline{mh}^2,$$

$$R_{p_1}^2 = \overline{mp_1}^2 - R_m^2,$$

d'ou

$$\overline{m_1p_1}^2 - R_{p_1}^2 = \overline{m_1h}^2 - \overline{mh}^2 + R_m^2;$$

on a de même

$$\overline{m_1p_2}^2 = \overline{m_1h}^2 + \overline{hp_2}^2 = \overline{m_1h}^2 + \overline{mp_2}^2 - \overline{mh}^2,$$

$$R_{p_2}^2 = \overline{mp_2}^2 - R_m^2,$$

d'où

$$\overline{m_1p_2}^2 - R_{p_2}^2 = \overline{m_1h}^2 - mh^2 + R_m^2,$$

et, par conséquent,

$$\overline{m_1p_1}^2 - R_{p_1}^2 = \overline{m_1p_2}^2 - R_{p_2}^2.$$

Mais la puissance d'un point par rapport à un cercle est égale à l'excès du carré de la distance de ce point au centre sur le carré du rayon; le point m_1 pris quelconque sur la droite mh est donc bien d'égale puissance par rapport à deux cercles quelconques satisfaisant aux conditions de la question; et cette droite est ainsi l'axe radical commun à tous ces cercles qui forment une suite de cercles radicaux du cercle M et que nous appellerons *suite* P.

On sait qu'on appelle *centre radical* de trois cercles le point unique d'où l'on peut décrire un cercle qui soit radical par rapport aux trois premiers. Soit C le centre radical de deux cercles de la suite P et du cercle M, ce point sera situé sur l'axe radical *mh* commun à tous les cercles de la suite P, et, par conséquent, le cercle C ne pourra pas être radical de l'un des cercles de cette suite sans l'être en même temps de tous les autres; il sera donc à la fois radical du cercle M et de deux quelconques des cercles de la suite P. Toutes les circonférences P prises deux à deux et les circonférences données ont ainsi le point C pour centre radical commun.

Note. Les cercles considérés dans cette question forment un *système radical* dont *pp* est l'axe primitif; sur la droite *mh* se trouvent les centres d'une suite illimitée de cercles coupant à angle droit tous les cercles de la suite P (ou *radicaux réciproques* par rapport à tous ces cercles P), et sur la partie de cette droite qui est corde commune à tous les cercles P, les centres d'une suite de cercles *radicaux simples* par rapport à ceux de la suite P. On peut consulter sur la théorie des suites radicales et ses applications le beau Mémoire que M. Gaultier de Tours a publié dans le XVI[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique.*

La première partie de cette question est la réciproque du théorème qui y est pris comme point de départ; quant à la seconde, elle s'y trouve d'une manière plus générale sous la forme suivante (p. 154).

Il n'existe qu'un cercle de chaque suite qui soit, par rapport à un cercle indépendant, radical de même espèce que par rapport aux centres de la suite opposée.